Exercice 1. On considère le problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \min f(x,y) := x^3 + y^2 \\ g(x,y) := x^2 + y^2 - 9 \leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

(1) Déterminer les points vérifiants les conditions nécessaire de minimalité du premier ordre.

(2) En déduire les solutions du problème.

Exercice 2. On considère la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + \gamma y^2)$, avec $\gamma > 0$.

(1) En appliquant une descente de gradient avec recherche linéaire exacte partant de $(x_0, y_0) = (\gamma, 1)$, trouver l'expression des itérations (x_k, y_k).

Exercice 3. Dans le processus de minimisation d'une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, la direction de Newton à partir d'un point x_k où $\nabla f(x_k) \neq 0$ et $\nabla^2 f(x_k)$ est définie positive est obtenue:

(1) soit en minimisant $\mathrm{d} \longmapsto \langle \nabla f(x_k), \mathrm{d}\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \nabla^2 f(x_k)\,\mathrm{d}, \mathrm{d}\right\rangle$ sur $\mathbb{R}^n$

(2) soit en minimisant $\mathrm{d} \longmapsto \langle \nabla f(x_k), \mathrm{d}\rangle$ sous la contrainte $\left\langle \nabla^2 f(x_k)\,\mathrm{d}, \mathrm{d}\right\rangle \leqslant 1$.

Montrer que les directions obtenues comme solutions de ces deux problèmes de minimisation sont les mêmes à une constante positive multiplicative près.

Exercice 4. Soit $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe strictement croissante, et $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. On définit $g(x) = \phi(f(x))$ et on suppose que f et g sont de classe C^2.

(1) Justifier pourquoi g est convexe.

(2) Comparer la méthode du gradient et celle de Newton, appliquées à f et g. Quel est le lien entre les directions de recherche ? Que dire quand un recherche linéaire exacte est utilisée ?

On peut utiliser le lemme d'inversion : Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ alors

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(I + CA^{-1}B\right)^{-1} CA^{-1}. \tag{2}$$

Exercice 5. Soit l'ensemble $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$.

(1) Dessiner C.

(2) Écrire les conditions d'optimalité de KKT de la minimisation de la fonction $f(x,y) = \exp(x - y) - x - y$ sur C. Sont-elles nécessaires et/ou suffisantes?

(3) Trouver le minimum global de cette fonction sur C.

Exercice 6. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels non-nuls. On considère l'ellipsoide

$$\mathcal{E} = \Big\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \Big\}.$$

Soit $x \notin \mathcal{E}$ et $y = P_{\mathcal{E}}(x)$. Montrer que

$$y_i = \frac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda} \ , \forall i = 1, \dots, n,$$

avec $\lambda > 0$ est l'unique solution (en λ) de l'équation $f(\lambda) = 0$ avec $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2+\lambda)^2} - 1$.

Exercice 7. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est dite $\mu-$fortement convexe, avec $\mu \geq 0$ si la fonction perturbée $x \mapsto f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|^2$ est convexe.
Montrer que si f est $\mu-$fortement convexe, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \partial f(x)$

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle + \frac{\mu}{2}\|y - x\|^2, \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 8. Soit $f : A \in \mathcal{S}^n \mapsto f(A) = \lambda_{\max}(A)$. Soit $A \in \mathcal{S}^n$ et v le vecteur propre normalisé associé à $\lambda_{\max}(A)$. Montrer que

$$vv^T \in \partial f(A).$$

Exercice 9. Soit f une fonction affine. On considère

$$g(x) = f(x) + a^T x + b.$$

Exprimer g^* en fonction de f^*, a et b.

Exercice 10. Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\mathrm{Prox}_f(x) + \mathrm{Prox}_{f^*}(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 11. Soit $f(x, z)$ une fonction convexe en les deux variables. On définit $g(x) = \inf_z f(x, z)$.

- Exprimer g^* en terme de f^*
- Calculer g^* avec

$$g(x) = \inf_z \{h(z) : \ Az + b = x\}$$

où h est convexe.