

Exercice 1. Montrer que les fonctions suivantes sont convexes :

(1) $f_1(x) = \langle a, x \rangle + b$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$.

(2) $f_2(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) $f_3(x) = x^p$, pour $x \in \mathbb{R}^+$ avec $p \geq 1$.

(4) $f_4(x) = x \ln(x)$, pour $x > 0$.

(5) $f_5(x) = e^{\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(6) $f_6(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ avec $x \in \mathbb{R}^n$.

(7) $f_7(x, y) = \frac{x^2}{y}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe bornée supérieurement. Montrer que f est constante.

Exercice 3. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ et $\lambda \in \Delta_n$ (le simplexe unité). Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}.$$

En déduire que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

Exercice 4. Soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Exercice 5. On rappelle qu'une application $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est monotone si

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable. Montrer que ∇f est monotone. Peut-on dire que toute application monotone est le gradient d'une fonction convexe ?

Exercice 6. On appelle fonction support (ou d'appui) d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ la fonction

$$\sigma_S(x) = \sup_{y \in S} x^T y \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

(1) Montrer que σ_S est convexe.

(2) Calculer σ_S pour les ensembles suivants :

(a) $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ avec $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$.

(b) $S = \mathbb{R}_+^n$.

(c) $S = B_2(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On définit la conjuguée (de Fenchel) de f par

$$f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (y^T x - f(y)).$$

Montrer que f^* est convexe. Calculer f^* pour :

(1) $f = \delta_C$, avec C un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ (fonction indicatrice valant 0 sur C , $+\infty$ ailleurs).

(2) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$.

(3) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{p}|x|^p$ avec $p > 1$.

Exercice 8. Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_0^1 f(x + t(y - x)) dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}. \quad (1)$$