

Exercice 1. Soient $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes. Montrer que les ensembles $C_1 \cap C_2, C_1 + C_2, C_1 \times C_2$ sont convexes.

Exercice 2. Montrer que les ensembles suivants sont convexes:

- (1) $L = \{x + td : t \in \mathbb{R}\}$ avec $x, d \in \mathbb{R}^n$ et $d \neq 0$.
- (2) Les boules ouvertes et fermées: $B(a, r), B_f(a, r)$ avec $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$.
- (3) $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.
- (4) $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. (1) Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ et $\mathcal{S}_{++}^n$ sont convexes. Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ est un cône, i.e., pour tout $\lambda \geq 0$ et $A \in \mathcal{S}_+^n$, on a $\lambda A \in \mathcal{S}_+^n$.

(2) Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ est fermé. Qu'elle est l'adhérence de $\mathcal{S}_{++}^n$?

Exercice 4. Soient $S, T \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que:

- (1) Si $S \subset T$ alors $\text{Conv}(S) \subset \text{Conv}(T)$.
- (2) $\text{Conv}(S + T) = \text{Conv}(S) + \text{Conv}(T)$
- (3) $\text{Conv}(\text{Conv}(S)) = \text{Conv}(S)$.
- (4) Montrer que $\text{Conv}(S \times T) = \text{Conv}(S) \times \text{Conv}(T)$.

Exercice 5. Soient $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes. Montrer que la somme partielle de C_1 et C_2 définie par

$$C := \{(x, y_1 + y_2) : x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in C_1, (x, y_2) \in C_2\},$$

est convexe

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et considérons les deux hyperplans parallèles suivants

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_i\}, \text{ pour } i = 1, 2.$$

Calculer la distance entre H_1 et H_2 .