**Exercice 1.** Calculer le gradient des fonctions suivantes:

- $f_1(x) = u^T x$.
- $f_2(x) = \frac{1}{2}(x^T Ax) + b^T x + c$, où $A \in \mathcal{S}^n, b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
- $f_3(x) = \|Ax - b\|_2^2$ .
- $f_4(x) = \|x\|_2$ .
- $f_5(x) = \log\left(\sum_{i=1}^m \exp(a_i^T x + b_i)\right)$, où $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}^n, b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$.
- $f_6(X) = \log\det(X)$ avec $X \in \mathcal{S}_{++}^n$.

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = f(x + y, x^2 + y^2).$$

Exprimer les dérivées partielles de $g$ en $(2, 2)$ en fonction de celles de $f$.

**Exercice 3.** Exprimer les ensembles suivants comme des boules. Préciser le centre, la norme, le rayon et si elles sont des ouverts ou fermés ?

- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - 2| + |y + 2| \leq 2\}$.

**Exercice 4.** Montrer que les ensembles suivants sont des fermés de $\mathbb{R}^2$

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - 1)^2 + y^2 \geq 2$ ou $(x + 1)^2 + y^2 \geq 1\}$.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sin(x) + \cos(y) \leq 1\}$.

**Exercice 5.** Montrer $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^4 \leq 4\}$ est compact dans $\mathbb{R}^2$.