Exercice 1. Montrer que les fonctions suivantes sont convexes:

(1) $f_1(x) = \langle a, x \rangle + b$, avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$,

(2) $f_2(x) = \|x\|$,

(3) $f_3(x) = x^p$ avec $p \geq 1$,

(4) $f_4(x) = x \log(x)$,

(5) $f_5(x) = e^x$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a < b$ deux réels.

(1) Montrer que
$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(x) + \frac{x-a}{b-a} f(b), \forall x \in [a, b].$$

(2) Montrer que
$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}, \ \forall x \in (a, b).$$

(3) Supposons que f est différentiable. En utilisant ce qui précède, montrer que
$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f'(b).$$

En déduire que si f est deux fois différentiable, on a $f''(b) \geq 0$ et $f''(a) \geq 0$.

Exercice 3. Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$\int_0^1 f(x + t(y-x))dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Exercice 4. Soient $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ et $\lambda \in \Delta_n$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \Pi_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}.$$

En déduire que
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i}.$$

Exercice 5. Soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$