Exercice 1. Soient $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes. Montrer que les ensembles $C_1 \cap C_2, C_1 + C_2, C_1 \times C_2$ sont convexes.

Exercice 2. Montrer que les ensembles suivants sont convexes:

(1) $L = \{x + td : \ t \in \mathbb{R}\}$ avec $x, d \in \mathbb{R}^n$ et $d \neq 0$.

(2) Les boules ouvertes et fermées: $B(a, r), B_f(a, r)$ avec $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$.

(3) $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x = b\}, \ a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.

(4) $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x \leq b\}, \ a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. (1) Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ et $\mathcal{S}_{++}^n$ sont convexes. Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ est un cône, i.e., pour tout $\lambda \geq 0$ et $A \in \mathcal{S}_+^n$, on a $\lambda A \in \mathcal{S}_+^n$.

(2) Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ est fermé. Qu'elle est l'adhérence de $\mathcal{S}_{++}^n$?

Exercice 4. Soient $S, T \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que:

(1) Si $S \subset T$ alors $\mathrm{Conv}(S) \subset \mathrm{Conv}(T)$.

(2) $\mathrm{Conv}(S + T) = \mathrm{Conv}(S) + \mathrm{Conv}(T)$

(3) $\mathrm{Conv}(\mathrm{Conv}(S)) = \mathrm{Conv}(S)$.

(4) Montrer que $\mathrm{Conv}(S \times T) = \mathrm{Conv}(S) \times \mathrm{Conv}(T)$.

Exercice 5. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété dite de demi-somme:

$$x, y \in C \Rightarrow \frac{x + y}{2} \in C.$$

C est-il convexe ? Que dire si C est supposé être fermé ?.

Exercice 6. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe non vide. On définit le cône normal de C en x par

$$N_C(x) = \begin{cases} \{z \in \mathbb{R}^n : \ \langle z, y - x \rangle \leq 0 \text{ pour tout } y \in C\} \text{ si } x \in C \\ \emptyset, \ \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $N_C(x)$ est un cône convexe fermé.

Exercice 7. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un convexe borné et symétrique tel que $0 \in \mathrm{int}(K)$. Montrer que

$$g_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ \frac{x}{\lambda} \in K\}$$

est une norme.

Exercice 8. Montrer que

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| + |x_2| \leq 1\} := B_{\|\cdot\|_1}(0, 1) = \mathrm{Conv}(e_1, -e_1, e_2, -e_2),$$

e_1 et e_2 étant les vecteurs de la base canonique de R^2. Quels sont les points extrémaux de $B_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$.