TD2

22 février 2024

Exercice 1

On note par

$$\mathcal{S}^n_{++} = \{A \in \mathcal{S}_n : \; x^T A x > 0 : \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$$

l'ensemble des matrice symétriques définies positives et

$$\mathcal{S}^n_{+} = \{A \in \mathcal{S}^n : \; x^T A x \geq 0 : \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n\}$$

l'ensemble des matrice symétriques semi-définies positives.

- Montrer que $\mathcal{S}^n_+$ et $\mathcal{S}^n_{++}$ sont convexes. Montrer que $\mathcal{S}^n_+$ est un cône, i.e., pour tout $\lambda \geq 0$ et $A \in \mathcal{S}^n_+$, on a $\lambda A \in \mathcal{S}^n_+$.
- Montrer que $\mathcal{S}^n_+$ est fermé. Qu'elle est l'adhérence de $\mathcal{S}^n_{++}$?

Exercice 2

Montrer que les ensembles suivants sont convexes :

1. $L = \{x + td : \; t \in \mathbb{R}\}$ avec $x, d \in \mathbb{R}^n$ et $d \neq 0$.
2. Les boules ouvertes et fermées : $B(a,r), B_f(a,r)$ avec $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$.
3. $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^T x = b\}, \; a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.
4. $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^T x \leq b\}, \; a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Donner le domaine où les fonctions suivantes sont convexes :

1. $f(x,y) = x + 2y + y^2$.
2. $f(x,y) = y^2/x$.
3. $f(x) = x \log(x)$.

Exercice 4

On appelle fonction support ou d'appui de $S \subset \mathbb{R}^n$ la fonction

$$\sigma_S(x) = \sup_{y \in S} x^T y \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que σ_S est convexe.
2. Calculer σ_S pour les ensembles suivants
   (a) $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ avec $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$.

(b) $S = \mathbb{R}^n_+$.

(c) $S = B_f(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leq 1\}$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. On définit la conjuguée de f par

$$f^*(x) = \sup_y y^T x - f(y).$$

Montrer que f^* est convexe. Calculer f^* pour :

1. $f = \delta_C$, avec C un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.
2. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$.
3. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{p}|x|^p$ avec $p > 1$.

Exercice 6

Soient $S, T \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que :

- Si $S \subset T$ alors Conv$(S) \subset$ Conv(T).
- Conv$(S + T) =$ Conv$(S) +$ Conv(T)
- Conv(Conv$(S)) =$ Conv(S).

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que sont gradient $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est L-Lipschitz, i.e.,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ pour tout } x, y, \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 (y - x)^T \nabla f(x + t(y - x))\mathrm{d}t.$$

2. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$f(y) \leq f(x) + (y - x)^T \nabla f(y) + \frac{L}{2}\|x - y\|^2.$$

3. Appliquer l'inégalité précédente pour $y = x - \gamma\nabla f(x)$ avec $\gamma < 2/L$.