Exercice 1. Calculer ∇f (ou J_f si f est vectorielle) des fonctions suivantes:

(1) $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto u^T x$.

(2) $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax + b \in \mathbb{R}^m$ avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

(3) $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}(x^T Ax) + b^T x + c$, avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Même question pour $A \in \mathcal{S}^n$.

(4) $f : \mathbb{R}^n \mapsto \|Ax - b\|_2^2$.

(5) $f(x) = \|x\|_2$.

(6) $f(x) = \log\left(\sum_{i=1}^m \exp(a_i^T x + b_i)\right)$, avec $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}^n, b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$.

(7) $f(X) = \log\det(X)$ avec $X \in \mathcal{S}^n_{++}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = f(x + y, x^2 + y^2).$$

Exprimer les dérivées partielles de g en $(1, 2)$ en fonction de celles de f.

Exercice 3. (1) Soit $A \in \mathcal{S}^n_{++}$. Peut-on dire que les composantes de A sont positives ?

(2) Soit $A \in \mathcal{S}^n_+$ (respectivement dans $\mathcal{S}^n_{++}$). Montrer que les éléments diagonaux de A sont positifs (respectivement strictement positifs).

(3) Soit $A \in \mathcal{S}^n_-$ (respectivement dans $\mathcal{S}^n_{--}$). Montrer que les éléments diagonaux de A sont négatifs (respectivement strictement négatifs). Soit $A \in \mathcal{S}^n$. Montrer que si A possède des éléments diagonaux strictement négatifs et positifs, alors A est non-définie.

Exercice 4. (1) Soient $A, B \in \mathcal{S}^n_+$. Montrer que $A + B \in \mathcal{S}^n_+$.

(2) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ et posons $B = AA^T$. Montrer que $B \in \mathcal{S}^n_+$. Montrer que $B \in \mathcal{S}^n_{++}$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

(3) Soient $A \in \mathcal{S}^n$ and $B \in \mathcal{S}^m$. Montrer que $A \in \mathcal{S}^n_+$ and $B \in \mathcal{S}^m_+$ si et seulement si $\begin{pmatrix} A & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{n+m}_+$

Exercice 5. Soit $M \in \mathcal{S}^n_{++}$. Montrer que $\|x\|_M = \sqrt{x^T Mx}$ est une norme.