RAPPELS: TOPOLOGIE ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

1. Calcul différentiel

1.1. Fonctions dérivables, fonctions différentiables.

Definition 1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $l_a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \to l_a, \text{ lorsque } h \to 0.$$

Cela revient à dire que

$$f(a+h) = f(a) + hl_a + \epsilon_a(h)|h|,$$

avec $\epsilon_a(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

Definition 2. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ avec U un ouvert. On dit que f est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \epsilon_a(h)\|h\|_\infty.$$

De façon équivalent

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \; \|h\|_\infty \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(a+h) - f(a) + L_a(h)\| \leq \epsilon \|h\|_\infty$$

1.2. Dérivées partielles.

Definition 3. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ avec U un ouvert et fixons $k \in \{1, \cdots, n\}$. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à sa $k$ème variable en $a \in U$ si

$$\frac{f(a + te_k) - f(a)}{h}$$

admet une limit quand $t \to 0$. On note cette limite $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. Ici, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1.3. Jacobienne et Gradient.

Definition 4. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ avec U un ouvert. Supposons que f admets en $a \in U$ des dérivées partielles par rapports à toutes ses variables. La matrice Jacobienne de f en a s'écrit

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Si $p = 1$, on définit le gradient de f en a par

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^T.$$

1.4. **Fonctions de classe C^1.**

Definition 5. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ avec U un ouvert. On dit que f est de classe C^1 sur U, et on note $f \in C^1(U;\mathbb{R}^p)$ si pour tout $a \in U$, f admets en a des dérivées partielles par rapports à toutes ses variables et l'application $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ poout La matrice Jacobienne de f en a s'écrit

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Si $p = 1$, on définit le gradient de f en a par

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^T.$$

1.5. **Composition.**

Theorem 1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts et $f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions de classe C^1. Alors $g \circ f \in C^1(U;\mathbb{R}^p)$ et on a, pour tout $a \in U$ et $j \in \{1, \dots, n\}$*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(a).$$

Cela s'exprime aussi de manière plus compacte comme

$$\forall a \in U,\ J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a).$$

1.6. **Ensembles ouverts/fermés.**

Definition 6. Soient N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert par rapport à la norme N si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B_N(x, r) \subset U$.

Proposition 1. *Toute union d'ouverts est toujours un ouvert. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Definition 7. Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si son complémentaire $F^c := \mathbb{R}^n \setminus F$ est un ouvert.

Proposition 2. *Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si $\forall (x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$*

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right) \Rightarrow x \in F.$$

Proposition 3. *Toute union finie de fermés est un fermé. Toute intersection de fermés est un fermé.*

2. Exercices

Exercice 1. Calculer le gradient des fonctions suivantes:

- $f_1(x) = u^T x$.
- $f_2(x) = \frac{1}{2}(x^T Ax) + b^T x + c$, où $A \in \mathcal{S}^n, b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
- $f_3(x) = \|Ax - b\|_2^2$.
- $f_4(x) = \|x\|_2$.
- $f_5(x) = \log\left(\sum_{i=1}^m \exp(a_i^T x + b_i)\right)$, où $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}^n, b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$.
- $f_6(X) = \log\det(X)$ avec $X \in \mathcal{S}_{++}^n$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = f(x + y, x^2 + y^2).$$

Exprimer les dérivées partielles de g en $(1, 2)$ en fonction de celles de f.

Exercice 3. Exprimer les ensembles suivants comme des boules. Préciser le centre, la norme, le rayon et si elles sont des ouverts ou fermés ?

- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : \ |x - 2|+|y + 2|\leq 2\}$.

Exercice 4. Montrer que les ensembles suivants sont des fermés de $\mathbb{R}^2$

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - 1)^2 + y^2 \geq 2 \text{ ou } (x + 1)^2 + y^2 \geq 1\}$.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sin(x) + \cos(y) \leq 1\}$.

Exercice 5. Montrer $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^4 \leq 4\}$ est compact dans $\mathbb{R}^2$.

3. Correction des exercices

Correction de l'exercice 1. (1) On a $f_1(x) = u^T x = \sum_{i=1}^n u_i x_i$. Donc, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\partial_{x_k} f_1(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_k} u_i x_i = \sum_{i=1}^n u_i \delta_{i,k} = u_k,$$

où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = k$ et 0 sinon. Finalement

$$\nabla f_1(x) = (u_1, \dots, u_n)^T = u.$$

(2) Traitons le terme quadratic dans f_2, le terme linéaire étant déjà démontré dans la première question. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}
\partial_{x_k}\left(x^T A x\right) = \partial_{x_k}\left(\sum_{i,j=1}^n x_j a_{ij} x_i\right) &= \partial_{x_k}\left(\sum_{i=1}\left(a_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j}^n x_j a_{ij} x_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}\left(a_{ii}\partial_{x_k}(x_i^2) + \sum_{i\neq j}^n \partial_{x_k}(x_j a_{ij} x_i)\right) \\
&= 2a_{kk}x_k + \sum_{i\neq k} a_{ik}x_i + \sum_{i\neq k} a_{ki}x_i \\
&= \sum_{j=1} a_{jk}x_j + \sum_{i=1} a_{ki}x_i \\
&= (A^T x)_k + (Ax)_k
\end{aligned} \tag{1}$$

Finalement $\nabla f_2(x) = \frac{1}{2}(A^T + A)x + b$. Si $A \in \mathcal{S}^n$ alors $A^T = A$ et donc $\nabla f_2(x) = Ax + b$.

(3) On voit que $f_3(x) = g \circ f(x)$ avec $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax - b$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$. Comme $\nabla g(x) = 2x$ et $\nabla f(x) = A^T$, la règle de la chaine donne $\nabla f_3(x) = 2A^T(Ax - b)$.

(4) $f_4(x) = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = g \circ f(x)$ avec $g : t \mapsto \sqrt{t}$ et $f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$. Notons que g n'est pas dérivable en 0, et donc f_4 est non différentiable en 0. Soit donc $x \neq 0$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\partial_{x_k} f_4(x) = x_k / \|x\|_2.$$

Donc en tout $x \neq 0, \nabla f_4(x) = x/\|x\|_2$.

(5) De même, on remarque que $f_5(x) = g \circ f(x)$ avec $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax + b$ où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de lignes $a_1^T, \dots, a_m^T$ et $g : x \in \mathbb{R}^m \mapsto \log(\sum_{i=1}^m \exp(x_i))$. Comme $\nabla f(x) = A^T$ et $\nabla g(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \exp(x_i)}(\exp(x_1), \dots, \exp(x_m))^T$ on trouver que

$$\nabla f_5(x) = \frac{1}{e^T y} A^T y, \text{ avec } y_i = \exp(a_i^T x + b_i), i = 1, \dots, m, \text{ et } e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m.$$

(6) On rappelle que le déterminant est une forme multilinéaire continue de $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, donc différentiable en tout $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pour $H = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sa différentielle s'écrit

$$D\det(X) : H \mapsto \sum_{i=1}^n \det(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n h_{i,j}(\mathrm{Cof}(X))_{ij},$$

où $\mathrm{Cof}(X)$ est la matrices des cofacteurs de X. Cela revient à dire $D\det(X)(H) = \langle \mathrm{Cof}(X), H\rangle$. Finalement

$$Df_6(X) = \frac{\langle \mathrm{Cof}(X), H\rangle}{\det(X)} = \langle (X^{-1})^T, H\rangle.$$

Comme $X \in \mathcal{S}^n_{++}$, on obtient $\nabla f_6(X) = X^{-1}$.

Correction de l'exercice 2. t Il suffit de voir que $g(x, y) = f \circ h(x, y)$ avec $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x^2 + y^2)$, donc $J_g(x, y) = J_f(h(x, y))J_h(x, y)$. Comme $J_h(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y, \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} J_g(1, 2) &= J_f(h(1, 2))J_h(1, 2) \\ &= \Big(\partial_x f(2, 5), \partial_y f(2, 5)\Big) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \Big(\partial_x f(2, 5) + 2\partial_y f(2, 5), \partial_x f(2, 5) + 4\partial_y f(2, 5)\Big) \end{aligned} \tag{2}$$

Correction de l'exercice 3.
$E = B_{||.||_2}((0, 0, 0), \sqrt{2})$.
$F = \overline{B}_{||.||_1}((2, -2), 2)$.

Correction de l'exercice 4.

- On voit que la complémentaire E^c de E s'écrit comme
$$E^c = B_{||.||_2}((1, 0), \sqrt{2}) \cap B_{||.||_2}((-1, 0), 1)$$
donc c'est un ouvert comme intersection de deux ouverts. Il s'en suit que E est un fermé.
- Soit $(x_n, y_n)_n \in F^{\mathbf{N}}$ qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $(x, y) \in F$. Comme $\forall k \in \mathbf{N}$
$$\sin(x) + \cos(y) = \lim_{n\to\infty} \sin(x_n) + \cos(y_n) \leq 1,$$
donc $(x, y) \in F$.

Correction de l'exercice 5. Montrons que G est un fermé borné. D'une part, si $(x_n, y_n)_n$ est une suite de G telle que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ alors $x^2 + y^4 = \lim_n x_n^2 + y_n^4 \leq 4$, d'où G est fermé. D'autre part, si $(x, y) \in G$, alors $x^2 + y^4 \leq 4$, et en particulier $x^2 \leq 4$ et $y^4 \leq 4$. Soit $x \in\ [-2, 2]$ et $y \in [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$. Finalement, $(x, y) \in \overline{B}_{||.||_\infty}((0, 0), 2)$, et donc G est borné. En conclusion, G est compact dans $\mathbb{R}^2$.