TDs Optimisation – 2A (MMIS / IF)

17 avril 2024

Exercice 1

Calculer le gradient des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = u^T x$.
- $f_2(x) = \frac{1}{2}(x^T A x) + b^T x + c$, où $A \in \mathcal{S}^n, b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
- $f_3(x) = \|Ax - b\|_2^2$.
- $f_4(x) = \|x\|_2$.
- $f_5(x) = \log\left(\sum_{i=1}^m \exp(a_i^T x + b_i)\right)$, où $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}^n, b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = f(x + y, x^2 + y^2).$$

Exprimer les dérivées partielles de g en $(1, 2)$ fonction de celles de f.

Exercice 3

Exprimer les ensembles suivants comme des boules. Sont-elles des ouverts ou fermés ?

- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : \ |x - 2| + |y + 2| \leq 2\}$.

Exercice 4

Montrer que les ensembles suivants sont des fermés de $\mathbb{R}^2$

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - 1)^2 + y^2 \geq 2$ ou $(x + 1)^2 + y^2 \geq 1\}$.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sin(x) + \cos(y) \leq 1\}$.

Exercice 5

Montrer $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^4 \leq 4\}$ est compact dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

On note par

$$\mathcal{S}_{++}^n = \{A \in \mathcal{S}_n : \ x^T A x > 0 : \ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$$

l'ensemble des matrice symétriques définies positives et

$$\mathcal{S}_{+}^n = \{A \in \mathcal{S}^n : \ x^T A x \geq 0 : \ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n\}$$

l'ensemble des matrice symétriques semi-définies positives.

- Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ et $\mathcal{S}_{++}^n$ sont convexes. Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ est un cône, i.e., pour tout $\lambda \geq 0$ et $A \in \mathcal{S}_+^n$, on a $\lambda A \in \mathcal{S}_+^n$.
- Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ est fermé. Qu'elle est l'adhérence de $\mathcal{S}_{++}^n$?

Exercice 7

Montrer que les ensembles suivants sont convexes :

1. $L = \{x + td : \ t \in \mathbb{R}\}$ avec $x, d \in \mathbb{R}^n$ et $d \neq 0$.
2. Les boules ouvertes et fermées : $B(a,r), B_f(a,r)$ avec $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$.
3. $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x = b\}, \ a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.
4. $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x \leq b\}, \ a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Donner le domaine où les fonctions suivantes sont convexes :

1. $f(x,y) = x + 2y + y^2$.
2. $f(x,y) = y^2/x$.
3. $f(x) = x \log(x)$.

Exercice 9

On appelle fonction support ou d'appui de $S \subset \mathbb{R}^n$ la fonction

$$\sigma_S(x) = \sup_{y \in S} \ x^T y \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que σ_S est convexe.
2. Calculer σ_S pour les ensembles suivants
   (a) $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ avec $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$.
   (b) $S = \mathbb{R}_+^n$.
   (c) $S = B_f(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leq 1\}$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. On définit la conjuguée de f par

$$f^*(x) = \sup_y y^T x - f(y).$$

Montrer que f^* est convexe. Calculer f^* pour :

1. $f = \delta_C$, avec C un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.
2. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$.
3. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{p}|x|^p$ avec $p > 1$.

Exercice 11

Soient $S, T \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que :

- Si $S \subset T$ alors Conv(S) $\subset$ Conv(T).
- Conv($S+T$) $=$ Conv(S) $+$ Conv(T)
- Conv(Conv(S)) $=$ Conv(S).

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que sont gradient $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est L-Lipschitz, i.e.,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x-y\|, \text{ pour tout } x, y, \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 (y-x)^T \nabla f(x + t(y-x))\mathrm{d}t.$$

2. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$f(y) \leq f(x) + (y-x)^T \nabla f(y) + \frac{L}{2}\|x-y\|^2.$$

3. Appliquer l'inégalité précédente pour $y = x - \gamma \nabla f(x)$ avec $\gamma < 2/L$.

Exercice 13

On considère le problème de minimisation suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x,y) := x^3 + y^2 \\ g(x,y) := x^2 + y^2 - 9 \leqslant 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

1. Déterminer les points vérifiants les conditions nécessaire de minimalité du premier ordre.
2. En déduire les solutions du problème.

Exercice 14

On considère la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + \gamma y^2)$, avec $\gamma > 0$.

1. En appliquant une descente de gradient avec recherche linéaire exacte partant de $(x_0, y_0) = (\gamma, 1)$, trouver l'expression des itérations (x_k, y_k).

Exercice 15

Dans le processus de minimisation d'une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, la direction de Newton à partir d'un point x_k où $\nabla f(x_k) \neq 0$ et $\nabla^2 f(x_k)$ est définie positive est obtenue :

1. soit en minimisant $\mathrm{d} \longmapsto \langle \nabla f(x_k), \mathrm{d} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \nabla^2 f(x_k) \mathrm{d}, \mathrm{d} \right\rangle$ sur $\mathbb{R}^n$
2. soit en minimisant $\mathrm{d} \longmapsto \langle \nabla f(x_k), \mathrm{d} \rangle$ sous la contrainte $\left\langle \nabla^2 f(x_k) \mathrm{d}, \mathrm{d} \right\rangle \leqslant 1$.

Montrer que les directions obtenues comme solutions de ces deux problèmes de minimisation sont les mêmes à une constante positive multiplicative près.

Exercice 16

Soit $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe strictement croissante, et $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. On définit $g(x) = \phi(f(x))$ et on suppose que f et g sont de classe C^2.

1. Justifier pourquoi g est convexe.

2. Comparer la méthode du gradient et celle de Newton, appliquées à f and g. Quel est le lien entre les directions de recherche ? Que dire quand un recherche linéaire exacte est utilisée ?

   On peut utiliser le lemme d'inversion : Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ alors

$$(A+BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(I + CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1}. \tag{2}$$

Exercice 17

On considère le problème de minimisation suivant

$$\min\left\{x^TQx + 2c^Tx : Ax = b\right\},$$

avec $Q \in \mathcal{S}^n_{++}$, $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$, and $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang plein. Trouver la solution optimale du problem.

Exercice 18

Soit l'ensemble $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$.

1. Dessiner C. En considérant les contraintes actives, exhiber 7 zones dans C.
2. Écrire les conditions d'optimalité de KKT de la minimisation de la fonction $f(x,y) = \exp(x-y) - x - y$ sur C. Sont-elles nécessaires et/ou suffisantes ?
3. Trouver le minimum global de cette fonction sur C.

Exercice 19

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels non-nuls. On considère l'ellipsoide

$$\mathcal{E} = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\right\}.$$

Soit $x \notin \mathcal{E}$ et $y = P_{\mathcal{E}}(x)$. Montrer que

$$y_i = \frac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda}, \forall i = 1, \ldots, n,$$

avec $\lambda > 0$ est l'unique solution (en λ) de l'équation $f(\lambda) = 0$ avec $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2+\lambda)^2} - 1$.

Exercice 20

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\partial f(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est convexe.

Exercice 21

Soit $f : A \in \mathcal{S}^n \mapsto f(A) = \lambda_{\max}(A)$. Soit $A \in \mathcal{S}^n$ et v le vecteur propre normalisé associé à $\lambda_{\max}(A)$. Montrer que

$$vv^T \in \partial f(A).$$

Exercice 22

Soit f une fonction affine. On considère

$$g(x) = f(x) + a^Tx + b.$$

Exprimer g^* en fonction de f^*, a et b.

Exercice 23

Soit $f(x,z)$ une fonction convexe en les deux variables. On définit $g(x) = \inf_z f(x,z)$.

- Exprimer g^* en terme de f^*
- Calculer g^* avec

  $$g(x) = \inf_z \{h(z) : \; Az + b = x\}$$

  où h est convexe.