

Espaces vectoriels

ENSIMAG Alternance 1^{ère} année

Hamza Ennaji

Dernière modification: February 8, 2024

Contents

Corps	2
Espaces vectoriels	3
2.1 Propriétés	4
2.2 Sous-espaces vectoriels	5
2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels	6
2.4 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels engendrés	7
2.5 Famille libre, famille liée	9
2.6 Bases et dimension	11
2.7 Somme de sous-espaces vectoriels.	13
Matrices et systèmes linéaires	16
3.1 Calcul matriciel	16
3.1.1 Vecteurs lignes et colonnes	17
3.1.2 Opérations sur les matrices	18
3.1.3 Inverse d'une matrice	20
3.2 Opérations élémentaires sur les matrices	21
3.2.1 Transvection de lignes	21
3.2.2 Dilatation de lignes	22
3.3 Échange de lignes	23
3.4 Matrices et systèmes triangulaires	25
3.4.1 Profondeur et pivot d'un vecteur	25
3.4.2 Matrice, matrice élargie d'un système	26
Appendice: Correction de quelques exercices	28

❖ Corps

Nous avons besoins de rappeler la notion de corps pour préciser l'ensemble où vivent les scalaires.

Définition 1. Un corps \mathbb{K} est un ensemble muni de deux opérations $+$ et \cdot dites addition et multiplication de scalaires tel que pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ et $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ et $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
- $0_{\mathbb{K}} + \alpha = \alpha$ et $1_{\mathbb{K}} \cdot \alpha = \alpha$.
- Il existe un élément $-\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha + (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$. Pour $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, il existe un élément $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$.
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Exemple. • L'ensemble des nombre réels \mathbb{R} est un corps pour l'addition et multiplication usuelles.

- L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un corps pour les lois $+$ et \cdot usuelles. On rappelle que pour $z = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \gamma + i\delta$:

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) \text{ et } z_1 z_2 = (\alpha\beta - \gamma\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$ est un corps pour l'addition et multiplication usuelles.
- L'ensemble $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ muni de l'addition et multiplication définies comme suit:

$$0 + 0 = 1 + 1 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ and } 1 \cdot 1 \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Remarque. S'il y'a pas d'ambiguïté, on notera simplement 0 et 1 au lieu de $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$.

Convention Le long du cours le corps \mathbb{K} désigne soit \mathbb{R} soit \mathbb{C} .

❖ *Espaces vectoriels*

Définition 2. Un espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ sur \mathbb{K} (ou \mathbb{K} -ev) est un espace muni de deux opérations:

- i) Addition de vecteur: $\forall x, y \in \mathbb{E}$ il existe un élément $x + y \in \mathbb{E}$.
- ii) Multiplication par scalaires: pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$, il existe un élément $\lambda \cdot x \in \mathbb{E}$.

Ces opération vérifient les hypothèses suivantes:

- A1. $x + y = y + x \forall x, y \in \mathbb{E}$.
- A2. $(x + y) + z = x + (y + z) \forall x, y, z \in \mathbb{E}$.
- A3. il existe un élément $0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}$ dit élément neutre pour l'addition, tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.
- A4. Pour tout $x \in \mathbb{E}$ il existe $y \in \mathbb{E}$ tel que $x + y = 0_{\mathbb{E}}$.
- A5. $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ pour tout $x \in E$.
- A6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
- A7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{E}$.
- A8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$.

Remarque. Les hypothèses (A1-A2-A3-A4) expriment le fait que $(\mathbb{E}, +)$ est un group commutatif (ou abélien). Autrement dit, $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sit $(\mathbb{E}, +)$ est un group abélien et que les hypothèses (A5-A6-A7-A8) sont vérifiées.

Exemple. • Exemple trivial: $\mathbb{E} = \{0\}$.

- $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} \forall i = 1, \dots, n\}$.
- $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} . Un élément P de \mathbb{E} s'écrit de la forme

$$P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i,$$

où les $a_i \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'entier n s'appelle le degré de P et on écrit $n = \deg(P)$. Pour un $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit λP par

$$(\lambda \cdot P)(X) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot P(X) = \sum_{i=0}^n \lambda \cdot a_i X^i.$$

Soit maintenant $Q(X) = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ un autre polynôme à coefficients dans \mathbb{K} . Sans perte de généralité, on peut supposer que Q est de même degré que P . On définit alors $P + Q$ par

$$(P + Q)(X) \stackrel{\text{def}}{=} P(X) + Q(X) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i.$$

- Soient E_1, \dots, E_n n espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Alors

$$\mathbb{E} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n E_i = E_1 \times \dots \times E_n$$

est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients réels. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ avec Plus généralement, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

2.1 Propriétés

Proposition 1. Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -e.v et $x, y, z \in \mathbb{E}$. On a

- Si $x + z = y + z$ alors $x = y$.
- Si $z + x = z + y$ alors $x = y$.
- $0_{\mathbb{E}}$ est unique: s'il existe $0' \in \mathbb{E}$ tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$ et $x + 0' = x$ alors $0_{\mathbb{E}} = 0'$.

Preuve. i) D'après Définition-2-(A4), il existe $z' \in \mathbb{E}$ tel que: $z + z' = 0_{\mathbb{E}}$. On a donc

$$x = x + 0_{\mathbb{E}} = x + (z + z') = (x + z) + z' = (y + z) + z' = y + (z + z') = y + 0_{\mathbb{E}} = y.$$

- Si $z + x = z + y$ alors par commutativité (Définition-2-(A1)) $x + z = y + z$ et on conclut d'après i) que $x = y$.

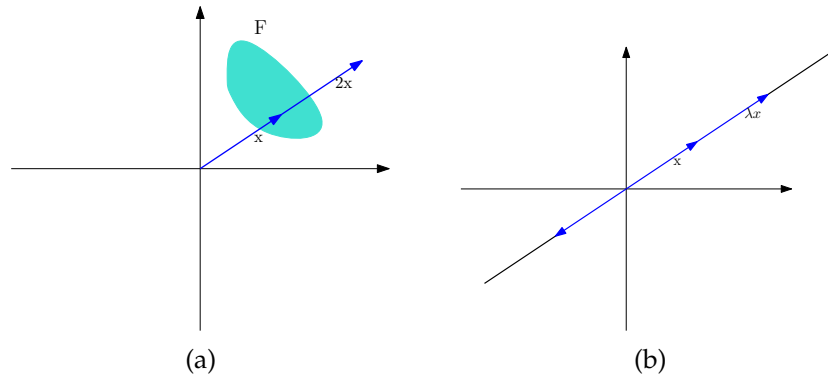


Figure 1: La Figure-1a montre un sous ensemble F du plan qui n'est stable ni par addition de vecteurs ni par multiplications par scalaires. Tandis que Figure-1b montre une partie du plan, dite droite vectorielle, qui est stable par addition de vecteurs et par multiplications par des scalaires.

iii) On a $x = x + 0_{\mathbb{E}} = x + 0'$ donc $0_{\mathbb{E}} = 0'$ toujours d'après i). □

Corollaire. Soit $x \in \mathbb{E}$ alors l'élément $y \in \mathbb{E}$ dans Définition-2 vérifiant (A4) est unique, i.e., si $y, y' \in \mathbb{E}$ vérifient $x + y = x + y' = 0_{\mathbb{E}}$ alors $y = y'$. On note $y = -x$.

Exemple. • Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n, 0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$.

- Dans $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}),$ on a $0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ alors $0_{\mathbb{R}[X]} = 0$ est le polynôme nul.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3. Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -ev. Un ensemble $F \subset \mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} s'il est lui même un espace vectoriel sur \mathbb{K} par rapport à l'addition de vecteurs et multiplications de scalaires définies sur \mathbb{E} . Autrement dit, si $(F, +_{\mathbb{E}}, \cdot_{\mathbb{E}})$ vérifie (A1-A8).

Exemple. Exemples de sous-espaces vectoriels

- $F = \{0_{\mathbb{E}}\} \subset \mathbb{E},$ où \mathbb{E} est un \mathbb{K} -ev.
- $F = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$

- $F = \mathbb{K}_n[X] \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{K}[X] : \deg(p) \leq n\} \subset \mathbb{K}[X]$.

Le résultat suivant fournit "un test" pour vérifier si un ensemble est ou non un sous-espace vectoriel d'un e.v donné.

Proposition 2 (Tests de sous-ev). Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -ev et $F \subset \mathbb{E}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} si et seulement si

- $0_{\mathbb{E}} \in F$.
- Si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$.
- Si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda x \in F$.

Cela est équivalent à dire

$$\lambda x + y \in F$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$.

Exercise

Vérifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 0\}$.

2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Définition 4. Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -ev et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} . Alors $F \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i \in I} F_i$ est aussi un sous-espace vectoriel.

Preuve. On utilise la Proposition-2. Dans un premier temps, comme les F_i sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} on sait que $0_{\mathbb{E}} \in F$. Maintenant pour $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x, y \in F_i$ pour tout $i \in I$. Cela donne que $\lambda x + y \in F_i$ pour tout $i \in I$. On en déduit que $\lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. D'où le résultat. \square

2.4 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels engendrés

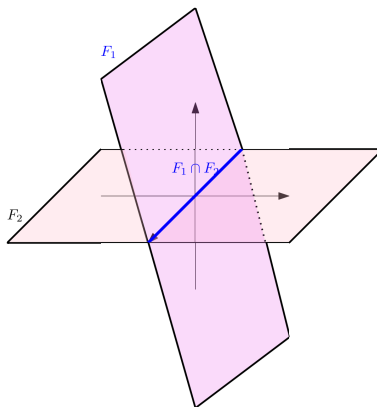


Figure 2: Illustration de l'intersection entre deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 (ici, deux plans vectoriels), leur intersection est une droite vectorielle.

Exemple. On considère les deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 :

$$F_1 = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \text{ et } F_2 = \{(0, x), x \in \mathbb{R}\}.$$

On vérifie facilement que $F_1 \cap F_2 = \{(0, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

2.4 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 5. Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -ev et $S \subset \mathbb{E}$. Un vecteur $x \in \mathbb{E}$ est une combinaison linéaire d'éléments de S s'il existe $n \in \mathbb{N}$, des vecteurs $v_1, \dots, v_n \in S$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

À partir d'une partie S de \mathbb{E} , on peut définir un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} avec les combinaisons linéaires des vecteurs de S .

Définition 6. Soit $S \subset \mathbb{E}$ un sous-ensemble non vide. On note par $\text{Vect}(S)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de S , i.e.,

$$\text{Vect}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, v_i \in S \right\}.$$

2.4 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels engendrés

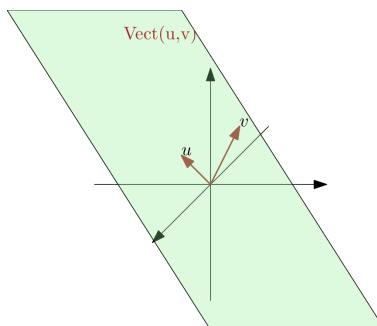


Figure 3: Deux vecteurs non-colinéaires u et v . Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\{u, v\})$ est le plan vectoriel qui les contient.

Remarque. • Par convention $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.

- On remarque facilement que $S \subset \text{Vect}(S)$. En effet, on a $v = 1_{\mathbb{K}} \cdot v$ pour tout $v \in S$.

Theorem 1. Soit $S \subset \mathbb{E}$, alors:

- $\text{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} .
- $S \subset \text{Vect}(S)$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} tel que $S \subset F$, alors $S \subset \text{Vect}(S) \subset F$

Définition 7. Une famille $S \subset \mathbb{E}$ est dite génératrice de \mathbb{E} si $\text{Vect}(S) = \mathbb{E}$.

Exemple. • La famille $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ avec

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1),$$

est une famille génératrice de \mathbb{R}^n . En effet, tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit:

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1(1, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 1).$$

- Le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} des nombres complexes est engendré par $\{1, i\}$ car tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x \cdot 1 + y \cdot i$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
- L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est engendré par la famille $(M_i)_{i=1,2,3,4}$ des ma-

trices dites élémentaires avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ s'écrit:

$$M = a \cdot M_1 + b \cdot M_2 + c \cdot M_3 + d \cdot M_4.$$

- La famille de monômes $\{1, X, \dots, X^n\}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \dots + a_n \cdot X^n.$$

2.5 Famille libre, famille liée

Étant donnée une famille génératrice $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{E} , on remarque que $0_{\mathbb{E}}$ se réalise de façon **trivial** comme combinaison linéaire des v_i , i.e.,

$$0_{\mathbb{E}} = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n.$$

Néanmoins, on peut avoir une réalisation **non-triviale** de $0_{\mathbb{E}}$ comme combinaison linéaire des v_i , dans le sens où on peut trouver des scalaires $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$0_{\mathbb{E}} = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n.$$

Cela motive la définition suivante

Définition 8. • Une famille $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vecteurs de \mathbb{E} est dite libre si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}} \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i.$$

Autrement dit la seule façon d'écrire $0_{\mathbb{E}}$ comme combinaison linéaire des v_i est la combinaison triviale.

- Une famille S qui n'est pas libre est liée. Cela revient à dire qu'il existe

des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}}.$$

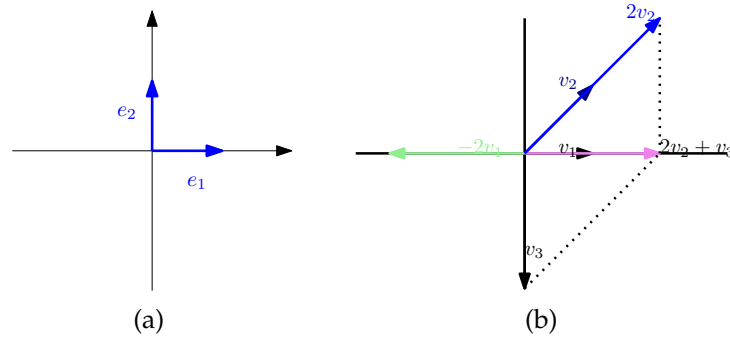


Figure 4: La Figure-4a illustre une famille libre de \mathbb{R}^2 , $S = \{e_1, e_2\}$. La Figure-4b illustre une famille $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ qui est liée avec $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$, $v_3 = (0, -2)$.

Proposition 3. Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -ev et $S_1 \subset S_2 \subset \mathbb{E}$ deux ensembles. Alors:

- Si S_1 est liée alors S_2 est liée.
- Si S_2 est libre alors S_1 est libre.

Exercise

Soient $E, F \subset \mathbb{R}^3$ définies par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - x = 0 \text{ et } z - y - 2x = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0\}$$

- 1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- 2) Soit $S_1 = \{u_1\}$ avec $u_1 = (1, 1, 3)$.
 - b) En déduire que $\text{Vect}(S_1) \subset E$.
 - c) Justifier que $E = \text{Vect}(S_1)$.
- 3) Soit $S_2 = (u_2, u_3)$ avec $u_2 = (3, 2, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.
 - a) Montrer que $\text{Vect}(S_2)$ est contenu dans F .

- b) Montrer que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de S_2 .
- c) Justifier que $F = \text{Vect}(S_2)$.
- d) La partie F est-elle un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ?
- 4) La famille $S = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle libre ou liée ? Que peut-on en déduire pour S_1 et S_2 ?

2.6 Bases et dimension

Définition 9. Une famille $S \subset \mathbb{E}$ est une base de \mathbb{E} si elle libre et génératrice.

Exemple. • La famille $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base (dite canonique) de \mathbb{R}^n .

- La famille $(E_{ij})_{i,j}$ avec $i = 1, \dots, m$ et $1, \dots, n$ des matrices dites unitermes est une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Chaque matrice $E_{i,j}$ ne possède qu'une entrée non nulle qui vaut 1 est qui se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne (cf. Exemple- pour $m = n = 2$):

$$E_{i,j} = \begin{matrix} & \text{colonne } j \\ & \downarrow \\ \text{ligne } i \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- La famille $\{1, X, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n[X]$.
- La famille $\{1, X, \dots, X^n, \dots\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Remarque. Les exemples précédents montrent en particulier qu'une base peut contenir un nombre infini d'éléments.

Le résultat suivant montre que toute famille génératrice finie peut être réduite à une base, essentiellement en enlevant les vecteur redondant.

Theorem 2 (de la base extraite). Soit S une famille génératrice finie de \mathbb{E} . Alors on peut extraire une base $B \subset S$ de \mathbb{E} .

Le résultat reste vraie en dimension infinie et repose sur l'Axiome du choix.

Exemple. On considère la famille $S = \{(-2, 0), (1, 1), (0, 1)\}$. On vérifie facilement que S est une partie génératrice de \mathbb{R}^2 et qu'en supprimant un de ses vecteurs on trouve une base de \mathbb{R}^2 . En effet le premier vecteur n'est rien d'autre que $-2 \cdot (1, 0)$ et le deuxième $(1, 1)$ s'écrit : $(1, 0) + (0, 1)$.

Le résultat suivant affirme que toute famille libre L dans \mathbb{E} contient au plus le même nombre d'éléments qu'une famille génératrice S de \mathbb{E} . En plus, L peut être complétée de façon convenable à partir de S pour obtenir une base.

Theorem 3 (de la base incomplète). Soit S une famille génératrice de \mathbb{E} , i.e., $\text{Vect}(S) = \mathbb{E}$ avec $\#(S) = n$ et soit $L \subset \mathbb{E}$ une famille libre telle que $\#(L) = m$. Alors

- $m \leq n$.
- Il existe une partie H de S avec $\#(H) = n - m$ telle que

$$\text{Vect}(L \cup H) = \mathbb{E}.$$

Définition 10. Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -ev. Si \mathbb{E} admet une base finie S , on dit que \mathbb{E} est de dimension finie et on note

$$\dim(\mathbb{E}) = \#(S).$$

Si \mathbb{E} n'a pas de base finie, on dit qu'il est de dimension infinie et on note $\dim(\mathbb{E}) = \infty$.

Exemple. • $\dim(\{0\}) = 0$ (pourquoi ?).

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ et $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$.
- $\dim(\mathbb{R}^n[X]) = n + 1$.
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ alors que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ (pourquoi ?).

Corollaire. Soit \mathbb{E} un ev de dimension n . Alors

- Toute famille libre de \mathbb{E} à n éléments est une base de \mathbb{E} .
- Toute famille libre de \mathbb{E} peut être étendue en une base de \mathbb{E} .

Proposition 4. Soit F un sev de \mathbb{E} avec $\dim(E) < \infty$. Alors $\dim(F) \leq \dim(\mathbb{E})$ avec égalité si et seulement si $\mathbb{E} = F$.

Corollaire. Soit F un sev de \mathbb{E} avec $\dim(E) < \infty$. Alors toute base de F peut être étendue en une base de \mathbb{E} .

Exercise

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Pour quelles valeurs de λ les familles $\{(1, \lambda), (\lambda, 2)\}$ et $\{(1, 0, \lambda), (1, 1, \lambda), (\lambda, 0, 1)\}$ est une base de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 respectivement.

Exercise

On considère $S = \{(1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3)\}$.

- Montrer que tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ avec les $a_i \in \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de S .
- Donner les coordonnées de P dans S .

On a vu que l'intersection de sev reste un sev. Le cas de l'union est peu plus subtile. En effet, il est facile de se convaincre que l'union de deux sev reste stable par multiplication par des scalaire mais pas par somme de vecteur comme illustré dans la Figure-5. Pour combler cette lacune, on introduit la notion de somme de sev.

2.7 Somme de sous-espaces vectoriels.

Soient F, G deux sev de \mathbb{E} . On définit

$$F + G = \{x + y : x \in F, y \in G\}.$$

On a le résultat suivant:

Theorem 4. • $F + G$ est un sev de \mathbb{E} .

- $F \cup G \subset F + G$.

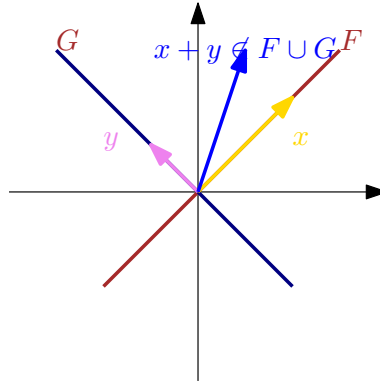


Figure 5: Illustration du fait que l'union de deux sev n'est pas stable par addition de vecteur.

- Tout sev H de \mathbb{E} qui contient $F \cup G$ contient $F + G$:

$$F \cup G \subset F + G \subset H.$$

Proposition 5. On a $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Exemple. On revient à l'exemple illustré par la Figure-2. La somme des deux plans F_1 et F_2 engendre \mathbb{R}^3 , i.e., $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ (voir la prochaine section). On a donc

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Une question naturelle qui se pose, c'est celle de l'unicité ou non de l'écriture $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Définition 11 (Somme directe). On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0_{\mathbb{E}}\}$. Dans ce cas on note:

$$F + G := F \oplus G.$$

Remarque. La condition $F \cap G = \{0\}$ exprime le fait que 0 s'écrit de façon unique. En effet, si $F \cap G = \{0\}$ alors l'écriture $x + y = 0$ avec $x \in F$ et $y \in G$ implique que $y = -x \in F \cap G$, i.e., $x = y = 0$. Inversement, si 0 s'écrit de façon unique $x + y = 0$, alors tout vecteur $x \in F \cap G$ vérifie $x + (-x) = 0$ avec $x \in F$ et $-x \in G$, donc $x = 0$.

Proposition 6. F et G sont en somme directe et leur somme engendre \mathbb{E} , i.e., $\mathbb{E} = F \oplus G$ si et seulement si tout vecteur $z \in \mathbb{E}$ s'écrit de manière unique

comme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. Dans ce cas:

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(F) + \dim(G).$$

On dira que F est un supplémentaire de G dans \mathbb{E} (et inversement).

Exercise

On considère les deux sev de $E = \mathbb{R}^4$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{E} : x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = \{(2x, -x, 0, x) : x \in \mathbb{E}\}.$$

- Montrer que F et G sont en somme directe.
- Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{E}$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x - 2\alpha, y + \alpha, z, t - \alpha) \in F$.
- En déduire que F et G sont supplémentaires.

❖ Matrices et systèmes linéaires

Dans ce chapitre m, n, p, q désignent des entiers naturels non nuls.

3.1 Calcul matriciel

Définition 12. On appelle matrice à coefficients dans \mathbb{K} , de taille (m, n) (ou de format $m \times n$, un tableau de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$. Ici m désigne le nombre de ligne et n le nombre de colonnes de A . On note des fois $A = (a_{ij})_{i,j}$ s'il n'y a pas de confusion.

Notation. On rappelle que l'ensemble des matrices de taille (m, n) à coefficient dans \mathbb{K} est noté par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^{m \times n}$. Quand $m = n$ on note tout simplement \mathcal{M}_n l'ensemble des matrices carrée de taille (n, n) .

Proposition 7 (Égalité entre deux matrices). Deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont égales lorsqu'elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et que les coefficients de même indices sont égaux. Autrement dit:

$$A = B \iff m = p, n = q \text{ et } a_{ij} = b_{ij} \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Exemple (Matrices particulières). • Matrice nulle:

$$\mathbf{0}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

- Matrice identité:

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- Matrices diagonale: elles sont de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Et on écrit de façon plus compacte: $A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. En particulier $\mathbf{I}_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$.

- Matrices triangulaires:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ (triangulaire supérieure).}$$

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ (triangulaire inférieure).}$$

3.1.1 Vecteurs lignes et colonnes

Définition 13. On appelle $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ la matrice ligne

$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) := l_i(A) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

On appelle $j^{\text{ème}}$ colonne de A la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} := c_j(A) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}).$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} \\ \log(2) & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Alors:

$$l_1(A) = (1, 3, \sqrt{2}), l_2(A) = (\log(2), 0, 2),$$

et

$$c_1(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ \log(2) \end{pmatrix}, c_2(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3(A) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Opérations sur les matrices

Définition 14 (Somme et multiplication par scalaires). Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors la somme $A + B := C = (c_{ij})_{i,j}$ est définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda A = C$ est définie par

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Exemple. On considère $\lambda = 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -9 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \lambda C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & -\frac{3}{2} \\ 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 15 (Transposée d'une matrice). La transposée d'une matrice est la matrice ayant pour lignes les colonnes de la matrice de départ. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on note sa transposée par A^T qui appartient à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. En particulier, si $A^T = B = (b_{ij})_{i,j}$ alors

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$$

Proposition 8. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

- $\forall i = 1, \dots, n \ l_i(A^T) = c_i(A)$.
- $\forall j = 1, \dots, m \ c_j(A^T) = l_j(A)$.
- $(A^T)^T = A$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ et $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Example. • On a $\mathbf{I}_n^T = \mathbf{I}_n$.

- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Produit de matrice: échauffement Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & h & i \end{pmatrix}$ et $X = (x, y, z)^T$. En effectuant le produit scalaire de chaque ligne de A avec X on a

$$AX = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ jx + hy + iz \end{pmatrix} = xc_1(A) + yc_2(A) + zc_3(A).$$

Maintenant on considère $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \eta & \kappa \\ \theta & \rho & \phi \end{pmatrix}$. De la même manière on a

$$\begin{cases} Ac_1(B) = \alpha c_1(A) + \delta c_2(A) + \theta c_3(A) \\ Ac_2(B) = \beta c_1(A) + \eta c_2(A) + \rho c_3(A) \\ Ac_3(B) = \gamma c_1(A) + \kappa c_2(A) + \phi c_3(A). \end{cases}$$

On voit que le produit de A et chaque colonne de B donne un vecteur colonne. Cela serait une façon naturelle de définir les colonnes de ce qui serait la matrice produit AB . Cela motive la définition suivante.

Définition 16 (Produit de matrice). Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le produit AB est bien défini et donné par $AB = C := (c_{ij})_{i,j}$ avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = l_i(A) \cdot c_j(B), \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}.$$

Remarque. On ne peut définir le produit de deux matrices que si les tailles sont compatibles. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors on peut effectuer le produit AB que si $p = n$ et le produit BA que si $q = m$.

Exemple. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = (2, 1, -1)^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$AB = (-3 \ 4)^T \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$

Proposition 9. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $D, E \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $F \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

- $\lambda(AD) = (\lambda A)D = A(\lambda D)$.
- $(A + B)E = AE + BE$ et $A(D + E) = AD + AE$.
- $A(EF) = (AE)F$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

3.1.3 Inverse d'une matrice

Définition 17. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = \mathbf{I}_n.$$

On note la matrice B par A^{-1} et est appelée la matrice inverse de A .

Notation. On note par $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ (groupe linéaire) l'ensemble des matrices inversibles de taille (n, n) .

Proposition 10. Soient $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $AB \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

3.2 Opérations élémentaires sur les matrices

3.2.1 Transvection de lignes

Définition 18. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $h, k \in \{1, \dots, m\}$ avec $h \neq k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Effectuer sur A la transvection de rapport λ de la ligne k sur la ligne h consiste à ajouter à chaque composante de $l_k(A)$ le produit par λ à l'entrée de A située à l'intersection de la colonne de cette entrée avec $l_k(A)$.

D'après cette définition, si la matrice obtenue est $B = (b_{ij})_{ij}$, alors

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq k, \\ a_{kj} + \lambda a_{kj} & \text{si } i = h. \end{cases}$$

Ou encore, en fonction des lignes de A , pour tout $i = 1, \dots, m$:

$$l_i(B) = \begin{cases} l_i(A) & \text{si } i \neq k \\ l_k(A) + \lambda l_k(A) & \text{si } i = h. \end{cases}$$

Proposition 11. Le résultat de la transvection de rapport λ de $l_k(A)$ sur $l_h(A)$ est égale au produit obtenu en multipliant à A à gauche par

$$\mathbf{I}_m + \lambda E_{h,k}.$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$. Le résultat de la transvection de rap-

port $\lambda = 2$ de $l_3(A)$ sur $l_1(A)$ donne Soit $B = \begin{pmatrix} a + 2a'' & b + 2b'' & c + 2c'' & d + 2d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$.

Notation. On note par $T^{h,k}(\lambda)$ la matrice $\mathbf{I}_m + \lambda E_{h,k}$.

Exemple (À connaître). • On distingue deux matrices de transvection de taille $(2, 2)$:

$$T^{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } T^{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

• On distingue six matrices de transvection de taille $(3, 3)$:

$$T^{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{1,3}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{3,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{2,3}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{3,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Dilatation de lignes

Définition 19. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $h \in \{1, \dots, m\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Effectuer sur A la dilatation de rapport λ de la ligne h consiste à multiplier par λ chaque entrée de $l_h(A)$.

D'après cette définition, si la matrice obtenue est $B = (b_{ij})_{ij}$, alors

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq h, \\ \lambda a_{hj} & \text{si } i = h. \end{cases}$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$. Le résultat de la dilatation de rapport

$$\lambda = 3 \text{ de } l_2(A) \text{ donne Soit } B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3a' & 3b' & 3c' & 3d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Notation. On note $u_h(\lambda) = \sum_{j=1, j \neq h}^m e_j + \lambda e_h$.

Proposition 12. Le résultat de la dilatation de rapport λ de $l_h(A)$ sur est égale au produit obtenu en multipliant à A à gauche par

$$D^h(\lambda) := \text{diag}(\mathbf{u}_h(\lambda)).$$

Exemple (À connaître). • On distingue deux matrices de dilatation de taille $(2, 2)$:

$$D^1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ et } D^2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• On distingue trois matrices de transvection de taille $(3, 3)$:

$$D^1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3.3 Échange de lignes

Définition 20. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $h, k \in \{1, \dots, m\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Effectuer sur A l'échange de $l_k(A)$ et $l_h(A)$ consiste à remplacer chaque composante de $l_h(A)$ par la composante de $l_k(A)$ située sur la même colonne et inversement.

Si la matrice obtenue en échangeant $l_k(A)$ et $l_h(A)$ est $B = (b_{ij})_{ij}$, alors

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq h \text{ et } i \neq k, \\ a_{kj} & \text{si } i = h, \\ a_{hj} & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Remarque. Effectuer sur A l'échange de $l_h(A)$ et $l_k(A)$ revient à effectuer successivement les opérations suivantes:

- Transvection de rapport 1 de $l_k(A)$ sur $l_h(A)$, cela revient à multiplier A par $T^{h,k}(1)$. La matrice obtenue $B = T^{h,k}(1)A$.
- Transvection de rapport -1 de $l_h(B)$ sur $l_k(A)$, cela revient à multiplier B par $T^{k,h}(-1)$. La matrice obtenue $C = T^{k,h}(-1)B$.
-

- Transvection de rapport 1 de $l_k(C)$ sur $l_h(C)$, cela revient à multiplier A par $T^{h,k}(1)$. La matrice obtenue $D = T^{h,k}(-1)C$.
- La dilatation de rapport -1 de $l_k(D)$. La matrice finale est donc $E = D^h(-1)D$, soit

$$E = D^h(-1)T^{h,k}(-1)T^{k,h}(-1)T^{h,k}(1)A.$$

Illustrons ça par l'exemple suivant:

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$. On veut échanger les lignes 1 et 3.

- Transvection de rapport 1 de $l_3(A)$ sur $l_1(A)$, cela donne

$$B = \begin{pmatrix} a + a'' & b + b'' & c + c'' & d + d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

- Transvection de rapport -1 de $l_1(B)$ sur $l_3(A)$, cela donne

$$C = \begin{pmatrix} a + a'' & b + b'' & c + c'' & d + d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ -a & -b & -c & -d \end{pmatrix}$$

- Transvection de rapport 1 de $l_3(C)$ sur $l_1(C)$, cela donne

$$D = \begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ -a & -b & -c & -d \end{pmatrix}$$

- La dilatation de rapport -1 de $l_3(D)$. La matrice finale est

$$E = \begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Proposition 13. Le résultat de l'échange des lignes $l_h(A)$ et $l_k(A)$ est égale

au produit obtenu en multipliant à A à gauche par

$$P^{h,l} := D^h(-1)T^{h,k}(1)T^{k,h}(-1)T^{h,k}(1) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}).$$

La matrice $P^{h,k}$ est la matrice dont les seules composantes non nulles valent 1 et sont d'indices soit (h, k) , soit (k, h) soit (i, j) avec $i \neq h$ et $j \neq k$.

Exemple (À connaître). • Il existe exactement une seule matrice d'échange de taille $(2, 2)$:

$$P^{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Il existe trois matrices d'échange de taille $(3, 3)$:

$$P^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise

Une matrice carrée S de taille $n \times n$ est dite scalaire lorsqu'elle est colinéaire avec \mathbf{I}_n .

- Soit S une matrice scalaire de taille 2×2 . Trouver deux matrices de dilatations D^1, D^2 telles que $S = D^1 D^2$.
- Soit S une matrice scalaire de taille 3×3 . Trouver deux matrices de dilatations D^1, D^2, D^3 telles que $S = D^1 D^2 D^3$.
- Montrer que pour toute matrice carrée A de taille $n \times n$ et pour toute matrice scalaire S de taille $n \times n$, on a $AS = SA$.
- Si A est une matrice diagonale de taille 2×2 telle que $AT = TA$ pour toute matrice de transvection T de taille 2×2 , montrer que A est scalaire.

3.4 Matrices et systèmes triangulaires

3.4.1 Profondeur et pivot d'un vecteur

Définition 21. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On appelle profondeur de x et on la note $\text{pf}(x)$, le plus petit entier qui est l'indice d'une composante non nulle de x . La composante de x dont l'indice est la profondeur de x est

appelée pivot de x et est notée $\mathbf{pv}(x)$.

Exemple. On a

$$\mathbf{pf}((0, 1)) = 2, \mathbf{pf}((3, 0)) = 1, \mathbf{pf}((0, 0, 2)) = 3, \mathbf{pv}((3, 1)) = 3, \mathbf{pv}((0, 0, 2)) = 2.$$

Par convention $\mathbf{pf}(0_{\mathbb{R}^n}) = n + 1$ mais il n'a pas de pivot.

Proposition 14. Soit $k \in \{1, \dots, n + 1\}$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- Si $\mathbf{pf}(x) \geq k$ et $\mathbf{pf}(y) \geq k$ alors

$$\mathbf{pf}(x + y) \geq k.$$

- Si $\mathbf{pf}(x) < \mathbf{pf}(y)$ alors x et $x + y$ ont la même profondeur et le même pivot.

3.4.2 Matrice, matrice élargie d'un système

Définition 22. Étant donné un système linéaire de m équation en n inconnues

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

qui s'écrit matriciellement de la forme $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

La matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est appelée matrice du système (\mathcal{S}) , la matrice $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ est appelée colonne du second membre de (\mathcal{S}) , et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne des inconnues. La matrice élargie du système (\mathcal{S}) est la matrice de taille $m \times (n + 1)$

$$\tilde{A} = [AB],$$

dont les n premières colonnes sont celles de A et la dernière est B .

Un cas particulière de systèmes est le suivant

Définition 23. Un système linéaire (S) est dit triangulaire si sa matrice A est triangulaire supérieure dont toutes les entrées diagonales sont non nulles.

Pour résoudre (S) dans le cas triangulaire, on procède comme suit. Comme $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Comme $\text{pf}(l_n(A)) = n$, la $n^{\text{ème}}$ équation donne $a_{nn}x_n = b_n$, soit $x_n = b_n/a_{nn}$. On injecte la valeur de x_n dans la $(n - 1)$ èmes équations. Cela donne un système triangulaire à $(n - 1)$ équation en $(n - 1)$ inconnues. On répète ce processus jusqu'à la première équation et ainsi retrouver toutes les valeurs des x_i . On parle ici de **remontée triangulaire**.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. On s'intéresse à la solution du système $AX = B$, c'est-à-dire du système linéaire

$$(S) \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 = -1 \\ 2x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_4 = 3. \end{cases}$$

. La dernière équation donne $x_4 = 1$. On obtient un système

$$(S_1) \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_3 = -4. \end{cases}$$

. De même, la dernière équation donne $x_3 = -2$ et le système devient

$$(S_2) \begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 = -7. \end{cases}$$

On obtient $x_2 = -7$ et la première équation donne $x_1 = -1$. Le système (S) admet donc un unique solution $x = (-1, -7, -2, 1)$.

On finit ce paragraphe avec le résultat suivant

Theorem 5. Tout système triangulaire admet une unique solution.

❖ Appendice: Correction de quelques exercices

Exercice

Soient $E, F \subset \mathbb{R}^3$ définies par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - x = 0 \text{ et } z - y - 2x = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0\}$$

1) *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . En effet:*

- **Test du vecteur nul:** On a $0 - 0 = 0$ et $0 - 0 - 2 \times 0 = 0$, donc $0_3 = (0, 0, 0) \in E$.
- **Test de la multiplication par un scalaire:** Soient $(x, y, z) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Les composantes de ce vecteur vérifient:

$$\lambda y - \lambda x = \lambda \cdot (y - x) = 0 \text{ et } \lambda z - \lambda y - 2\lambda x = \lambda \cdot (z - y - 2x) = 0$$

Donc $\lambda \cdot (x, y, z) \in E$.

- **Test de la somme:** Soient $(x, y, z), (a, b, c) \in E$. On a

$$(x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$$

Les composantes de ce vecteur vérifient:

$$(y+b)-(x+a) = (y-x)+(b-a) = 0 \text{ et } (z+c)-(y+b)-2(x+a) = (z-y-2x)+(c-b-2a) = 0$$

Donc $(x, y, z) + (a, b, c) \in E$.

Conclusion: E est un sev de \mathbb{R}^3 .

2) Soit $S_1 = \{u_1\}$ avec $u_1 = (1, 1, 3)$.

a) *Vérifier que u_1 appartient à E . En effet :*

$$1 - 1 = 0 \text{ et } 3 - 1 - 2 \times 1 = 0$$

Donc $u_1 \in E$.

b) *En déduire que $\text{Vect}(S_1) \subset E$. Comme u_1 appartient à E , $S_1 = \{u_1\}$ est élément de E . Comme E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , toute combinaison linéaire de u_1 reste dans E , et par conséquent $\text{Vect}(S_1) \subset E$.*

- c) *Justifier que $E = \text{Vect}(S_1)$. Il suffit de démontrer que tout vecteur de E est combinaison linéaire de u_1 . Cela revient à démontrer que $E \subset \text{Vect}(S_1)$. La question 2 – b) donne l'inclusion inverse.*

Soit donc (x, y, z) un vecteur de E . On a par définition de E :

$$y - x = 0 \quad \text{donc} \quad y = x$$

et

$$z - y - 2x = 0 \quad \text{donc} \quad z = y + 2x = 3x \quad (\text{car } y = x)$$

On remplace dans les coordonnées du vecteur (x, y, z) et on trouve :

$$(x, y, z) = (x, x, 3x) = x \cdot (1, 1, 3) = xu_1.$$

Donc $E \subset \text{Vect}(S_1)$. Conclusion: $E = \text{Vect}(S_1)$.

- 3) Soit $S_2 = (u_2, u_3)$ avec $u_2 = (3, 2, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

- a) *Montrer que $\text{Vect}(S_2)$ est contenu dans F . Par définition, $\text{Vect}(S_2)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de L_2 . On remarque d'abord que u_2 et u_3 appartiennent à F . En effet :*

$$2 \times 3 - 3 \times 2 + 0 = 6 - 6 = 0 \quad \text{donc} \quad u_2 \in F$$

et

$$2 \times 1 - 3 \times 1 + 1 = 0 \quad \text{donc} \quad u_3 \in F$$

Prenons donc une combinaison linéaire quelconque de S_2 et montrons qu'elle appartient à F . Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha u_2 + \beta u_3 = (3\alpha, 2\alpha, 0) + (\beta, \beta, \beta) = (3\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \beta)$$

Les composantes de cette combinaison linéaire vérifient :

$$2 \times (3\alpha + \beta) - 3 \times (2\alpha + \beta) + \beta = 6\alpha + 2\beta - 6\alpha - 3\beta + \beta = 0$$

Donc toute combinaison linéaire de L_2 est dans F , i.e, $\text{Vect}(L_2) \subset F$.

- b) *Montrer que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de S_2 . Nous utilisons la méthode pour déterminer si un certain vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs. Montrons que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de L_2 . Soit donc (x, y, z) un vecteur de F , et déterminons des scalaires α, β tels que*

$$(x, y, z) = \alpha u_2 + \beta u_3$$

Par définition de F , on peut exprimer z en fonction de x et y . Plus précisément, $z = 3y - 2x$. On a donc un système linéaire à deux inconnues (α et β) à résoudre. Les coordonnées de (x, y, z) doivent être traitées comme des paramètres :

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \\ \beta = 3y - 2x \end{cases}$$

On obtient immédiatement $\alpha = x - y$ et $\beta = 3y - 2x$. Donc tout vecteur (x, y, z) de F peut s'écrire comme $\alpha u_2 + \beta u_3$.

Remarque. On peut également commencer par exprimer z en fonction de x et y , c'est à dire: $z = 3y - 2x$. Donc

$$(x, y, z) = (x, y, 3y - 2x) = x \cdot (1, 0, -2) + y \cdot (0, 1, 3)$$

Il suffit donc de vérifier que $v = (1, 0, -2)$ et $w = (0, 1, 3)$ sont combinaisons linéaires de u_2 et u_3 .

- c) *Justifier que $F = \text{Vect}(S_2)$.* D'après la question 3-a) on a démontré que $\text{Vect}(S_2) \subset F$, et d'après la question 3-b) on a démontré que tout vecteur de F est combinaison linéaire de L_2 , c'est à dire, $F \subset \text{Vect}(S_2)$. D'où l'égalité $F = \text{Vect}(S_2)$.
- d) *La partie F est-elle un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ?* D'après la question 3 - c), $F = \text{Vect}(S_2)$. Donc F est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et est engendré par la famille S_2 .
- 4) *La famille $S = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle libre ou liée ? Que peut-on en déduire pour S_1 et S_2 ?* Considérons la famille $S = (u_1, u_2, u_3)$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. On a le système:

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ 3a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 2a \\ 2b = 2a \\ c = -3a \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Donc la famille S est libre. Comme toute sous famille d'une famille libre est libre, les familles S_1 et S_2 sont libres.

Exercise

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Pour quelles valeurs de λ les familles $\{(1, \lambda), (\lambda, 2)\}$ et $\{(1, 0, \lambda), (1, 1, \lambda), (\lambda, 0, 1)\}$ est une base de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 respectivement.*

Exercise

On considère $S = \{(1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3)\}$.

- *Montrer que tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ avec les $a_i \in \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de S .*

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$, où les coefficients $a_i \in \mathbb{R}$ sont donnés. La question est de trouver des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ qui vérifient

$$\begin{aligned} P(X) &= \alpha_0 + \alpha_1(1 + X) + \alpha_2(1 + X + X^2) + \alpha_3(1 + X + X^2 + X^3) \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X + (\alpha_2 + \alpha_3)X^2 + \alpha_3X^3. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on se retrouve avec un système triangulaire qui se résout par la méthode de remontée:

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a_0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = a_2 \\ \alpha_3 = a_3 \end{cases} \quad (3)$$

La dernière équation donne $\alpha_3 = a_3$ et en remplaçant successivement dans les autres équations on trouve $\alpha_2 = a_2 - a_3$, $\alpha_1 = a_1 - a_2$, $\alpha_0 = a_0 - a_1$. Le système (S) étant triangulaire, donc sa solution est unique. On vient de montrer que S est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

- *Donner les coordonnées de P dans S . Les coordonnées de P dans S sont les solutions du système (S):*

$$(\alpha_0 = a_3, \alpha_2 = a_2 - a_3, \alpha_1 = a_1 - a_2, \alpha_0 = a_0 - a_1).$$

Exercise

On considère les deux sev de $E = \mathbb{R}^4$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{E} : x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = \{(2x, -x, 0, x) : x \in \mathbb{E}\}.$$

- *Montrer que F et G sont en somme directe. Cela revient à démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Soit donc $v = (x, y, z, t) \in F \cap G$. Par définition de F , cela donne les coordonnées de v vérifient $x + y + z + t = 0$. Comme $v \in G$ alors $(x, y, z, t) = (2\alpha, -\alpha, 0, \alpha)$. On obtient, encore, par définition de F que $2\alpha - \alpha + 0 + \alpha = 0$, soit $\alpha = 0$. D'où $v = (0, 0, 0, 0)$.*

- Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{E}$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x - 2\alpha, y + \alpha, z, t - \alpha) \in F$. On note $v_\alpha := (x - 2\alpha, y + \alpha, z, t - \alpha)$. Alors $v_\alpha \in F$ si et seulement si

$$x - 2\alpha + y + \alpha + z + t - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}(x + y + z + t).$$

- En déduire que F et G sont supplémentaires. D'après la première question $F \cap G = \{0\}$. Il nous reste à montrer que $\mathbb{E} = F + G$. Soit donc $v = (x, y, z, t)$. D'après la question précédente, $v_\alpha = (x - 2\alpha, y + \alpha, z, t - \alpha) \in F$ pour $\alpha = \frac{1}{2}(x + y + z + t)$. D'autre part, puisque $w_\alpha = (2\alpha, -\alpha, 0, \alpha) \in G$, et

$$v = v_\alpha + w_\alpha,$$

il vient que tout $v \in \mathbb{E}$ se décompose comme somme d'un élément de F et un élément de G . D'où le résultat.

Exercice

Une matrice carrée S de taille $n \times n$ est dite scalaire lorsqu'elle est colinéaire avec \mathbf{I}_n .

- Soit S une matrice scalaire de taille 2×2 . Trouver deux matrices de dilatations D^1, D^2 telles que $S = D^1 D^2$. Soit $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ une matrice scalaire. Elle s'écrit donc sous la forme αI_2 , $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme les matrices élémentaires de dilatation de taille 2 sont de deux types

$$D^1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

En prenant ces deux matrices avec un rapport de dilatation α , on a

$$D^1(\alpha)D^2(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2 = S.$$

- Soit S une matrice scalaire de taille 3×3 . Trouver deux matrices de dilatations D^1, D^2, D^3 telles que $S = D^1 D^2 D^3$. De façon semblable, les matrices élémentaires de dilatation de taille 3 sont:

$$D^1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D^3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

Si $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est scalaire, donc s'écrivant sous la forme $S = \alpha I_3$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, il suffit de remarquer que

$$D^1(\alpha)D^2(\alpha)D^3(\alpha) = S.$$

- *Montrer que pour toute matrice carrée A de taille $n \times n$ et pour toute matrice scalaire S de taille $n \times n$, on a $AS = SA$. Soient $A, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec S une matrice scalaire. Écrivant $S = \alpha I_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a*

$$AS = A(\alpha I_n) = \alpha(AI_n) = \alpha(I_n A) = (\alpha I_n)A = SA.$$

- *Si A est une matrice diagonale de taille 2×2 telle que $AT = TA$ pour toute matrice de transvection T de taille 2×2 , montrer que A est scalaire. On rappelle que les matrices de transvection de taille 2 sont de deux types*

$$T^{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T^{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

Soit $A = \text{diag}(a, b) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ une matrice diagonale telle que $AT = TA$ pour tout $T \in \{T^{1,2}(\lambda), T^{2,1}(\lambda)\}$. Montrer que A est scalaire revient à démontrer que $a = b$. Effectuant le calcul avec $T = T^{1,2}(\lambda)$, l'autre cas se fait de manière similaire. On a

$$\begin{aligned} AT = TA &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \lambda b \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \lambda a = \lambda b. \\ &\Leftrightarrow a = b \text{ (car } \lambda \neq 0.) \end{aligned}$$