Optimisation - Ensimag MMIS/IF **22 mai 2024**

Examen 2A

Le sujet comporte trois exercices indépendants et l'épreuve dure **2 heures**. Le polycopié et notes de cours sont autorisés. Les ordinateurs et téléphones portables sont interdits. Un soin particulier devra être accordé à la qualité et la précision de la rédaction. Toute imprécision du vocabulaire ou absence d'explications de la démarche suivie sera sanctionnée. Les questions de "cours" qui doivent être traitées efficacement. Pas besoin de tout faire pour avoir le maximum (barème approximatif : 7 - 4 - 4 - 7).

Questions de cours (7 points)

1. Rappeler la définition de la fonction support d'un ensemble et pourquoi une fonction support est toujours convexe.
2. Rappeler la définition du sous-différentiel d'une fonction. Donner le sous-différentiel des fonctions à variable réelle $f(x) = |x|$ et $g(x) = -|x|$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ une fonction propre, convexe et soit x un point de différentiabilité de f. Donner le lien entre le gradient et le sous-différentiel de f en x.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Montrer que $f \in C_L^{1,1}(\mathbb{R})$ avec L à préciser. Pour une méthode de descente de gradient à pas constant, comment doit-on choisir le pas en pratique ?
5. Rappeler la définition de la direction de Newton. Donner la formule des itérations de Newton pour la fonction $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
6. Rappeler la définition de l'opérateur proximal d'une fonction g. Calculer $\mathbf{Prox}_g$ pour $g = \delta_C(x)$ avec C un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. [*On rappelle que δ_C est l'indicatrice de C, qui vaut 0 sur C et $+\infty$ ailleurs.*]
7. Soit $g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} -\lambda \sum_{i=1}^n \log x_i & x > 0 \\ \infty & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.1}$$

   avec $\lambda > 0$. Calculer $\mathbf{Prox}_g$.

Exercice 1 (4 points)

On considère le problème d'optimisation suivant

$$\min_{(x,y)\in C} x - y := f(x,y), \tag{1.2}$$

avec $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1, \ x \geqslant 0\right\}$.

1. Tracer l'ensemble C.
2. Écrire les conditions KKT et résoudre le problème.

Exercice 2

Étant donnés m points $s_1, \cdots, s_m \in \mathbb{R}^n$ et m poids $\omega_1, \ldots, \omega_m > 0$. Le problème qu'on va regarder consiste à chercher le point $x \in \mathbb{R}^n$ minimisant la distance pondérée à chacun des $s_i, i = 1, \ldots, m$. Cela peut être reformulé sous la forme d'un problème d'optimisation :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i \|x - s_i\| := f(x) \right\}. \tag{1.3}$$

Première partie (4 points)

1. La fonction objective est-elle convexe ? différentiable ?
2. Donner la condition d'optimalité du premier ordre associée au problème (1.3).
3. Montrer que la condition d'optimalité du premier ordre peut s'écrire de la forme $x = F(x)$, avec

$$F(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\omega_i}{\|x - s_i\|} \right)^{-1} \sum_{i=1}^{m} \frac{\omega_i s_i}{\|x - s_i\|},$$

et $x \neq s_i$ pour tout $i = 1, \ldots, m$. Proposer une méthode itérative pour résoudre (1.3).

Deuxième partie (7 points)

1. Montrer que pour x différent de $s_1 \ldots, s_m$

$$F(x) = x - \tau \nabla f(x),$$

où τ est à préciser. Que deviennent les itérations $x_{k+1} = F(x_k)$?

2. On définit la fonction $h_x(y) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\|y - s_i\|^2}{\|x - s_i\|}$ pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{s_1, \ldots, s_m\}, y \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Justifier pourquoi le problème

   $$\min_{y\in\mathbb{R}^n} h_x(y), \tag{1.4}$$

   admet une unique solution qu'on notera $\bar{y}$.
   (b) En écrivant la condition d'optimalité associée au problème (1.4), montrer que $\bar{y} = F(x)$.
   (c) Vérifier que $h_x(x) = f(x)$.
   (d) Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{s_1, \ldots, s_m\}$ et $y \in \mathbb{R}^n$,

   $$h_x(y) \geq 2f(y) - f(x).$$

   (**Indication** : utiliser que pour $a, b > 0$, on $\frac{a^2}{b} \geq 2a - b$.)
   (e) Montrer que $f(F(x)) \leq f(x)$ et que $f(F(x)) = f(x)$ si et seulement si $x = F(x)$. (**Indication** : remarquer que $h_x(F(x)) \leq h_x(x)$).
3. Déduire que la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ définie par

$$x_{k+1} = x_k - \tau_k \nabla f(x_k), \tag{1.5}$$

avec $x_k \notin \{s_1, \ldots, s_m\}$ pour tout $k \geq 0$, vérifie : i) $(f(x_k))_{k\geq 0}$ est décroissante et ii) $f(x_k) = f(x_{k+1})$ si et seulement si $\nabla f(x_k) = 0$.