Chapitre 1.

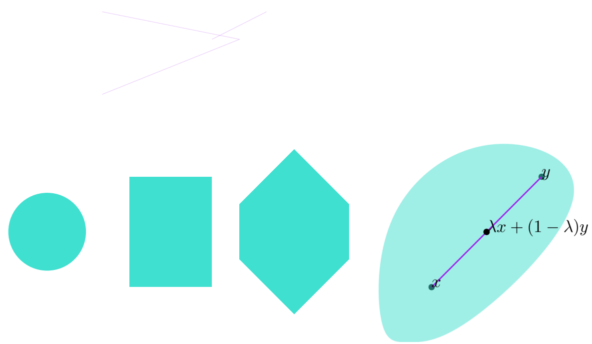
Ensembles convexes

1.1 Définitions

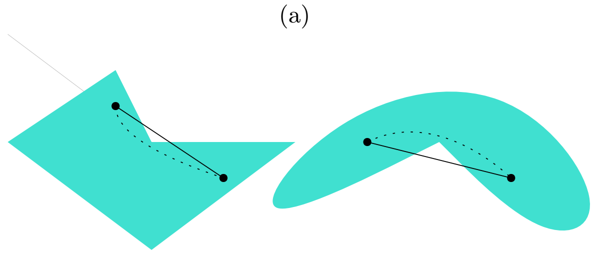
1.1.1 Ensembles convexes

Définition 1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$. On dit que C est convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

Remarque 1. La définition est équivalent à dire que le ségmant $[x, y] \subset C$. La Figure-Fig. 1.1 illustre quelques exemples d'ensembles convexes et non-convexes.



(a)



(b)

Figure 1.1: La Figure-1.1a: des ensembles convexes de $\mathbb{R}^2$. Figure-1.1b: ensembles non convexes.

Exemple 1. Voici quelques exemples d'ensembles convexes:

- Dans $\mathbb{R}$, les seuls exemples d'ensembles convexes sont les intervalles: $(a, b), [a, b], (-\infty, a]$ etc.
- Les boules (ouvertes, fermées):

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| < r\} \ \text{ et } \ B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| \leq r\}$$

  avec $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$.
- Les hyperplans:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x = b\}, \ a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}.$$

- Les demis-plans, les ellipsoïdes.
- Soit $\mathcal{S}^n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\}$ l'ensemble des matrices symétriques. On rappelle que $\mathcal{S}^n$ est un espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$. Les ensembles $\mathcal{S}^n_+ = \{A \in \mathcal{S}^n : A \succeq 0\}$ et $\mathcal{S}^n_+ = \{A \in \mathcal{S}^n : A \succ 0\}$ sont des ensembles convexes.

1.1.2 Ensembles affines

Définition 2. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$. On dit que C est affine si pour tout $x, y \in C$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

Évidemment, un ensemble affine est convexe. La réciproque n'est pas vraie.

Exemple 2.
- L'ensemble des solutions $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b\}$ d'un système linéaire est un ensemble affine.
- Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. L'ensemble

$$a + E := \{a + x : \ x \in E\},$$

est un espace affine.

1.2 Opérations et propriétés topologiques préservant la convexité

Le résultat suivant récapitule quelques opérations préservant la convexité.

Théorème 1.
1. Soient $C_i \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in I$, des ensembles convexes, alors $C \overset{\text{def}}{=} \cap_{i\in I} C_i$ est convexe.
2. Soient $C_1, \dots, C_m$ des convexes de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, alors les ensembles

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i C_i = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : \ x_i \in C_i, \ i = 1, \dots, m \right\},$$

et

$$\prod_{i=1}^m C_i = \left\{ (x_1, \dots, x_m) : \ x_i \in C_i, \ i = 1, \dots, m \right\},$$

sont convexes.

3. Si $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe et $\Phi : C \to \mathbb{R}^m$ définie par $\Phi(x) = Ax + b$ avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$, alors

$$\Phi(C) = \left\{ y = Ax + b : \ x \in C \right\}$$

est convexe. De même, si $D \subset \Phi(C)$ est convex, alors

$$\Phi^{-1}(D) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \Phi(x) \in D \right\}$$

est convexe.

Preuve.
1. Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors $x, y \in C_i$ pour tout $i \in I$, et par convexité des C_i, $z := \lambda x + (1-\lambda)y \in C_i$, et ce, pour tout $i \in I$. Donc $z \in C$.
2. Voir TD.
3. Soient $y_1, y_2 \in \Phi(C)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $y := \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \Phi(C)$. Par

définition, il existe $x_1, x_2 \in C$ tel que $y_1 = \Phi(x_1), y_2 = \Phi(x_2)$, i.e., $y_1 = Ax_1 + b$ et $y_2 = Ax_2 + b$. Donc $y = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + b$. Par convexité de C, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$ et donc $y \in \Phi(C)$. De même, soient $x_1, x_2 \in \Phi^{-1}(D)$. Alors $\Phi(x_1) = Ax_1 + b := y_1$ et $\Phi(x_2) = Ax_2 + b := y_2$ pour $y_1, y_2 \in D$. Soit $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ avec $\lambda \in [0,1]$. Alors

$$Ax + b = \lambda(Ax_1 + b) + (1-\lambda)(Ax_2 + b) = \lambda\Phi(x_1) + (1-\lambda)\Phi(x_2) \in D.$$

$\square$

Remarque 2. Dans Théorème 1-1, l'ensemble des indices I est quelconque, i.e., peut être infini.

Exemple 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. L'ensemble suivant, dit polytope,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\},$$

est convexe. En effet, on peut voir que

$$P = \cap_{i=1}^m H_i, \text{ avec } H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \; l_i(A)x \leq b_i\},$$

où $l_i(A)$ est la ième ligne de A. Comme les H_i sont convexe (pourquoi ?), P est convexe comme intersection d'ensembles convexes.

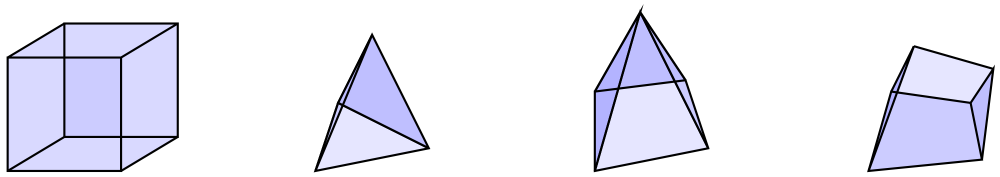


Figure 1.2: Exemples de polytopes.

Théorème 2. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe. Alors $\overline{C}$ est convexe.

Preuve. Soient $x, y \in \overline{C}$ et $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{C}$. Il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de C telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$ quand $n \to \infty$. Comme C est convexe, il vient que $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in C$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \to \lambda x + (1-\lambda)y$, i.e., $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{C}$. $\square$

Preuve. (bis) Il suffit de remarquer que

$$\overline{C} = \cap_{\varepsilon>0} C + B(0,\varepsilon),$$

et conclure par Théorème 1-1. $\square$

Théorème 3. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe. Alors $\mathrm{int}(C)$ est convexe.

Avant de démontrer ce résultat, on introduit le lemme suivant.

Lemme 1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe d'intérieur non vide. Soit $x \in \mathrm{int}(C)$ et $y \in \overline{C}$. Alors $\lambda x + (1-\lambda) \in C$ pour tout $\lambda \in (0,1)$.

Preuve. Comme $x \in \mathrm{int}(C)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset C$. Soit $\lambda \in (0,1)$ et posons $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Montrons que $B(z,\eta) \subset C$ pour un certain $\eta > 0$. Soit W tel que $\|z_1 - z\| < \varepsilon(1-\lambda)$. Comme $y \in \overline{C}$, il existe $u \in C$ tel que $\|u - y\| < (\varepsilon(1-\lambda) - \|w - z\|)\,\lambda^{-1}$.

On pose $v = (w - \lambda u)/(1-\lambda)$. Comme $(1-\lambda)x = z - \lambda y$, il vient que

$$\begin{aligned} \|v - x\| &= \frac{1}{1-\lambda}\|(w-z) + \lambda(y-u)\| \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda}\Big(\|w-z\| + \varepsilon(1-\lambda) - \|w-z\|\Big) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.1}$$

On en déduit que $v \in C$ car $B(x,\varepsilon) \subset C$ et par la suite $w = (1-\lambda)v + \lambda u \in C$. Finalement, pour $\eta = (1-\lambda)\varepsilon$, on a $B(z,\eta) \subset C$, ce qui termine le preuve. □

Preuve. du Théorème 3. Si $\text{int}(C) = \emptyset$ rien à démontrer. Sinon, soient $x, y \in \text{int}(C)$ et soit $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ avec $\lambda \in (0,1)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset C$. On a

$$B(z,(1-\lambda)\varepsilon) = \lambda y + (1-\lambda)B(x,\varepsilon) \subset C,$$

et donc $z \in \text{int}(C)$. □

Le résultat suivant se démontrer facilement grâce au Lemma 1.

Proposition 1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe d'intérieur non vide. Alors

1. $\overline{\text{int}(C)} = \overline{C}$.
2. $\text{int}(\overline{C}) = \text{int}(C)$.

On termine cette partie par le résultat suivant.

Proposition 2. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Alors $\text{Conv}(X)$ est compact.

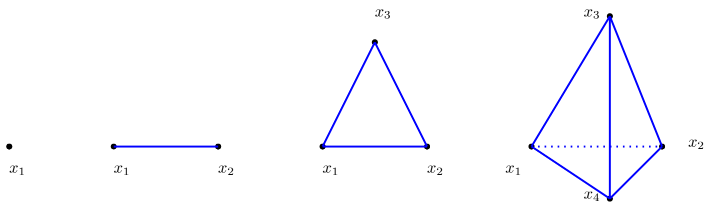
Remarque 3. En général, le passage par l'enveloppe convexe ne préserve pas la fermeture. Cela peut être vu avec l'exemple suivant. Soit $X = \{\binom{0}{0}\} \cup \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2_+ : xy \geq 1.\}$ On vérifie facilement que X est fermé tandis que $\text{Conv}(X) = \{\binom{0}{0}\} \cup \mathbb{R}^2_{++}$ n'est ni ouvert ni fermé.

1.3 Enveloppe convexe

Définition 3. Soient $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Une combinaison convexe des x_i est un vecteur de la forme $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. On écrit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Delta_m$ où

$$\Delta_m = \Big\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ \lambda_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, m \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\Big\}$$

.



(a)

Figure 1.3: Simplexes dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 4. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe et $x_1, \dots, x_m \in C$. Alors pour tout $\lambda \in \Delta_m$ on a $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in C$.

Preuve. On procède par récurrence. Pour $m = 1$ rien à démontrer. Supposons que pour tout vecteurs $x_1, \dots, x_m \in C$ et $\lambda \in \Delta_m$, on a $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in C$. Soient maintenant $x_1, \dots, x_m, x_{m+1} \in C$ et $\lambda \in \Delta_{m+1}$. Montrons que $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i := y \in C$. Si $\lambda_{m+1} = 1$, on a $y = x_{m+1} \in C$. Supposons donc que $\lambda_{m+1} < 1$. On a

$$z = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \lambda_{i+1} x_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{m+1}} x_i}_{y} + \lambda_{m+1} x_{m+1}.$$

Comme $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}} = 1$ (car $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 - \lambda_{m+1}$), il s'en suit que $y \in C$, et par conséquence $z = (1 - \lambda_{m+1})y + \lambda_{m+1} x_{m+1} \in C$. □

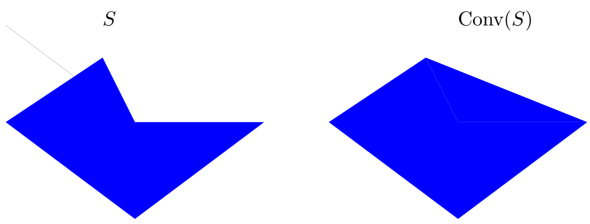
Définition 4. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. On appelle enveloppe convexe de S, et on note $\mathrm{Conv}(S)$ l'ensemble des combinaisons convexes de S:

$$\mathrm{Conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : \quad x_i \in S \ \forall i = 1, \dots, m \text{ et } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Delta_m \right\}.$$

Remarque 4.
1. Dans la Définition 4, l'entier m est quelconque.
2. L'enveloppe convexe d'un ensemble S est le plus petit convexe qui le contient: Si $S \subset U$ avec U convexe alors $\mathrm{Conv}(S) \subset U$.

Proposition 3. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. Si avec $S \subset U$ avec U convexe alors $\mathrm{Conv}(S) \subset U$.

Preuve. La preuve est immédiate. Si $z \in \mathrm{Conv}(S)$, alors $z = \sum_{i=1}^m \lambda x_i$ avec $x_i \in S$ et $\lambda = (\lambda)_i \in \Delta_m$. Comme $S \subset U$ alors les x_i appartiennent aussi à U. Ce dernier étant convexe, il contient $\sum_{i=1}^m \lambda x_i$, i.e., $z \in U$. Donc $\mathrm{Conv}(S) \subset U$. □



(a)

Figure 1.4: Exemple d'un ensemble non-convexe et son enveloppe convexe.

Le résultat suivant affirme que tout vecteur x dans l'enveloppe convexe d'un sous ensemble S de $\mathbb{R}^n$ peut d'écrire comme combinaison linéaire d'au plus $n + 1$ vecteurs de S.

Théorème 5 (Carathéodory)**.** Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathrm{Conv}(S)$. Alors il existe $x_1, \dots, x_{m+1} \in S$ tels que $x \in \mathrm{Conv}(\{x_1, \dots, x_{n+1}\})$

Preuve. Soit $c \in \mathrm{Conv}(S)$, il existe, par définition, $x_1, \dots, x_m \in S$ et $\lambda \in \Delta_m$ tel que $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Supposons que $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Si $m \leq n+1$, rien à démontrer, sinon, $m \geq n+1$. Considérons la famille de vecteurs $(v_i)_{i=2,\dots,m}$ définie par $v_i = x_i - x_1$. On remarque que la famille est liée puisqu'elle contient plus que n vecteurs. Il existe donc des réels $\mu_2, \dots, \mu_m$ non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^m \mu_i v_i = 0$, i.e., $\sum_{i=2}^m \mu_i (x_i - x_1) = 0$. On définit $\mu_1 = -\sum_{i=2}^m \mu_i$.

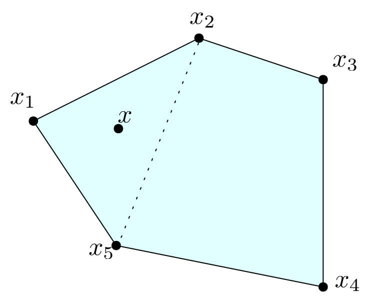


Figure 1.5: Dans cet example on a $x \in \mathrm{Conv}(\{x_1, \dots, x_5\})$. Par le théorème de Carathéordory x peut s'exprimer comme combinaison d'au plus 3 vecteur. Ici, on voit bien que $x \in \mathrm{Conv}(\{x_1, x_2, x_5\})$.

On a par construction

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 0,$$

où les μ_i sont non tous nuls. En particulier, $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mu_i < 0$, et pout $\eta \geq 0$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \eta \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i,$$

avec $\beta_i = \lambda_i + \eta\mu_i$ et $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$. L'écriture $\sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i$ est une combinaison convexe ssi $\beta_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Comme les $\lambda_i > 0$, cela est vrai pour $\eta \in [0, \varepsilon]$ avec $\varepsilon = \min_{\{i:\ \mu_i < 0\}} \frac{-\lambda_i}{\mu_i}$. Pour $\eta = \varepsilon$, obtient que $\lambda_{i^*} + \eta\mu_{i^*} = 0$ avec $i^* \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\frac{-\lambda_{i^*}}{\mu_{i^*}} = \varepsilon$. Cela fournit une combinaison convexe de x avec $m - 1$ vecteurs. On répète le processus jusqu'à obtenir une combinaison convexe avec au plus $n + 1$ vecteurs. $\square$

Exemple 4. On considère $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset \mathbb{R}^2$ avec $x_1 = \binom{1}{1}, x_2 = \binom{1}{2}, x_3 = \binom{2}{1}, x_4 = \binom{2}{2}$. Soit $x \in \mathrm{Conv}(S)$ donné par $x = 1/8x_1 + 1/4x_2 + 1/2x_3 + 1/8x_4 = \frac{1}{8}\binom{13}{11}$. Par Théorème 5, on peut représenter x par trois vecteurs de S. On procède comme dans la preuve du théorème. Les vecteur $u = (x_2 - x_1), v = (x_3 - x_1)$ et $w = (x_4 - x_1)$ sont linéairement indépendants. On a $\mu_2 u + \mu_3 v + \mu_4 w = 0$ avec $\mu_2 = \mu_3 = 1$ et $\mu_4 = -1$. Donc $\mu_1 = -(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) = -1$. La relation de dépendance linéaire s'écrit $-x_1 + x_+2 + x_3 - x_4 = 0$. On a, pour $\eta \geq 0$

$$\begin{aligned} x &= (1/8 + \eta\mu_1)x_1 + (1/4 + \eta\mu_2)x_2 + (1/2 + \eta\mu_3)x_3 + (1/8 + \eta\mu_4)x_4 \\ &= (1/8 - \eta x_1 + (1/4 + \eta)x_2 + (1/2 + \eta)x_3 + (1/8 - \eta)x_4, \end{aligned} \tag{1.2}$$

et pour assurer que l'écriture ci-dessus est une combinaison convexe, on impose que $1/8 - \eta \geq 0, 1/4 + \eta \geq 0, 1/2 + \eta \geq 0$, soit $\eta \in [0, 1/8]$. Pour $\eta = 1/8$, on obtient

$$x = \frac{3}{8}x_2 + \frac{5}{8}x_3, \quad (cf. \mathit{Fig.}\ 1.6).$$

1.4 Cônes convexes

Définition 5 (Cône). Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. On dit que S est un cône si pour tout $x \in S$ et $\lambda \geq 0$, on a $\lambda x \in S$.

Le résultat suivant donne une caractérisation d'un cône convexe.

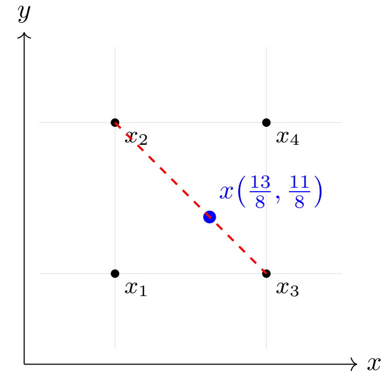


Figure 1.6: Illustration de l'Exemple 4.

Proposition 4. Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est un cône convexe si et seulement si

1. $x \in S, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in S$,
2. $x, y \in S \Rightarrow x + y \in S$.

Preuve. Supposons que S vérifie Items 1 and 2 et soient $x, y \in S$ et $\lambda \in [0, 1]$. On sait déjà par Item 2 que S est un cône. D'autre part, comme λx et $(1-\lambda)y$ appartiennent à S, on déduit par Item 1 que $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$, d'où la convexité. Supposons maintenant que S est un cône convexe. La propriété Item 1 découle de la définition d'un cône. Soient $x, y \in S$, on a que $1/2(x+y) \in S$ par convexité de S. Comme ce dernier est un cône, il vient que $x + y = 2.\,(1/2(x+y)) \in S$, d'où Item 2. ☐

Voici quelques examples de cônes convexes.

Exemple 5.

1. Tout plan non vide $A \subset \mathbb{R}^n$.
2. $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$. Ou plus généralement, un ensemble de la forme
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq 0\},$$
avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On remarque que pour $A = -I_n$, on obtient $\mathbb{R}^n_+$.
3. Le cône de Lorentz
$$L^n = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|x\| \leq t, \ x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

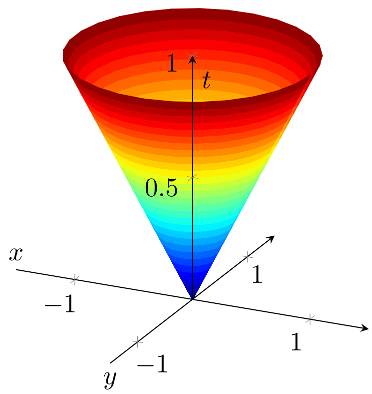


Figure 1.7: Le cône de Lorentz L^2.

1.4.1 Points extrémaux (ou sommets)

Définition 6. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $x \in S$ est un point extrémal de S s'il n'existe pas $y \neq z \in S$ et $\lambda \in (0,1)$ tel que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. On note par $\text{ext}(S)$ l'ensemble des points extrémaux de S.

Remarque 5. Une autre définition possible est la suivante. Soit $x \in S \subset \mathbb{R}^n$. Alors $x \in \text{ext}(S)$ si $\nexists y \neq z \in S$ tels que $x = \frac{y+z}{2}$.

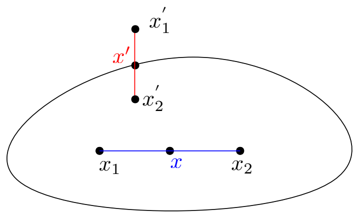


Figure 1.8: Exemple d'un point extrémal x' car il n'existe pas $x_1' \neq x_2' \in C$ tels que $x' = \frac{x_1'+x_2'}{2}$, tandis que x n'est pas un point extrémal.

Étant donné un convexe $C \subset \mathbb{R}^n$, on cherche en pratique un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ tel que $C = \text{Conv}(S)$. On a le résultat suivant.

Théorème 6. Soit $x \in C = \text{Conv}(S)$ avec $S \subset \mathbb{R}^n$. Alors $x \in \text{ext}(S)$ ssi $x \notin \text{Conv}(S \setminus \{x\})$.

Preuve. Soit $x \in \text{Conv}(S \setminus \{x\})$. Montrons que $x \notin \text{ext}(C)$, i.e., $\exists y \neq z \in C$ tels que $x \in [y,z]$, soit $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ avec $\lambda \in (0,1)$. Comme $x \in \text{Conv}(S \setminus \{x\})$, il vient que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ avec $x_i \in S \setminus \{x\}$ pour tout $i = 1, \dots, k$ et $\lambda \in \Delta_k$. Comme $x \neq x_i, \forall i$, on a nécessairement $k > 1$. Considérons $z = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} x_i$ et $y = x_k$. Pour ce choix, on a bien

$$x = \lambda_k y + (1-\lambda_k)z \in (y,z).$$

Inversement, supposons que $x \notin \text{ext}(C)$, i.e., $x = (y+z)/2$ avec $y,z \in C = \text{Conv}(S)$. On a $y = \sum_{i=}^{k} \lambda_i x_i$ et $z = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i$ avec $x_i \in S$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Si $x \neq x_i$ pour tout i, on a

$$x = (y+z)/2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \in \text{Conv}(S \setminus \{x\}).$$

Sinon, supposons que $x = x_i$ pour un certain i, disons $x = x_k$. Comme $x \neq y, z$, il vient que $\lambda_k < 1$ et $\mu_k < 1$. On a

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i = \frac{y+z}{2} - \frac{\lambda_n + \beta_n}{2} x_k = (1 - \frac{\lambda_k + \beta_k}{2})x.$$

Donc $x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2 - \lambda_k - \mu_k} x_i \in \text{Conv}(S \setminus \{x\})$. □

Le résultat ci-dessus affirme en particulier que si $C = \text{Conv}(S)$ et $x \in \text{ext}(C)$ alors nécessairement $x \in S$, i.e., S contiendrait $\text{ext}(C)$. Mais en général, on ne peut pas affirmer que $C = \text{Conv}(\text{ext}(C))$ comme le montreent les exemples suivant: $C = \mathbb{R}_+^n$ dont le seul point extrémal est 0 ou encore $C = B(0,1)$ qui n'a pas de points extrémaux. Le premier exemple n'est pas borné tandis que le deuxième n'est par fermé. Le résultat suivant dit de Krein Milman ou Minkowski, assure qu'un compact convexe est égal à l'enveloppe des ses points extrémaux.

Théorème 7 (Krein-Milman)**.** Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe. Alors $C = \mathrm{Conv}(\mathrm{ext}(C))$.

Preuve. Admise. $\square$