Exercice 1. On considère la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+\gamma y^2)$, avec $\gamma > 0$. En appliquant une descente de gradient avec recherche linéaire exacte partant de $(x_0, y_0) = (\gamma, 1)$, trouver l'expression des itérations (x_k, y_k).

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{S}^n_{++}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{\|x\|^4}{4}\Big(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\Big)^2,$$

où λ_1 (resp. λ_n) est la plus grande (resp. plus petite) valeur propre de A.

Exercice 3. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x), \tag{P}$$

où $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x + c$, avec $A \in \mathcal{S}^n_{++}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$.

(1) Justifier pourquoi (P) admet une unique solution, que l'on notera x^*, qui est l'unique solution de l'équation $\nabla f(x) = 0$.

(2) On se propose d'approcher x^* en utilisant une descente de gradient à pas optimal, i.e., générer une suite $(x_k)_{k\geq 0}$ où $x_{k+1} = x_k - t_k\nabla f(x_k)$ avec

$$t_k = \mathrm{argmin}_t\, f(x_k - t\nabla f(x_k)).$$

Montrer les propriétés suivantes :

(a) $t_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\langle A\nabla f(x_k), \nabla f(x_k)\rangle}$,

(b) $\nabla f(x_{k+1}) = \nabla f(x_k) - t_k A\nabla f(x_k)$,

(c) $\langle\nabla f(x_{k+1}), \nabla f(x_k)\rangle = 0$,

(d) $f(x_{k+1}) - f^* = (f(x_k) - f^*)\left(1 - \frac{\|\nabla f(x_k)\|^4}{\langle A\nabla f(x_k), \nabla f(x_k)\rangle\langle A^{-1}\nabla f(x_k), \nabla f(x_k)\rangle}\right)$.

(3) Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre décroissant. On rappelle que le conditionnement de A est donné par $c(A) = \lambda_1/\lambda_n$. Montrer que:

(a) $f(x_k) - f^* \leq (f(x_0) - f^*)\left(\frac{c(A)-1}{c(A)+1}\right)^{2k}$.

(b) $\|x_k - x^*\| \leq \sqrt{\frac{2(f(x_0)-f^*)}{\lambda_n}}\left(\frac{c(A)-1}{c(A)+1}\right)^k$.