**Exercice 1.** Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact non vide et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x^* \in C$ tel que $f(x^*) = \min_{x\in C} f(x)$.

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ on rappelle que $f$ est dite propre si $-\infty \notin f(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$. On dira que $f$ est coercive si $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. Finalement, $f$ est dite semi-continue inférieurement (sci) ssi pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers $x$ on a $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$.

(1) Montrer que $f$ est coercive si et seulement si $\mathrm{Lev}(f, \alpha)$ est borné pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) Supposons que $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ est propre, semi-continue inférieurement et coercive. Monter qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

(3) Supposons que $f$ est continue et coercive et soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vide. Montrer que $x^* \in S$ tel que $f(x^*) = \min_{x\in S} f(x)$.

(4) Montrer que $f(x, y) = x^2 + y^2$ admet un minimum global sur $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x + y \leq -1\}$.

**Exercice 3.** Trouver et déterminer la nature des points critique des fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d = 2, 3$.

(1) $f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 + 3x^2y - 24y$.

(2) $f(x, y) = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.

(3) $f(x, y) = f(x, y) = x^2 - y^2$.

(4) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

(5) $f(x, y, z) = -3z^2 + 2y^2 + 2xz + 2y + 1$.

**Exercice 4.** Soit $n \geqslant 2$ et $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto p(x) := (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

(1) Montrer que $0_{\mathbb{R}^n}$ est le seul point critique de $p$.

(2) Montrer que $0_{\mathbb{R}^n}$ est minimum local strict de $p$, mais qu'il n'est pas minimum global de $p$.

**Exercice 5.** Soit $f(x) = x^T Ax + 2b^T x + c$ avec $A \in \mathcal{S}^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que $x^*$ est un point stationnaire si et seulement si $Ax^* = -b$.

(2) Si $A \succeq 0$, alors $x^*$ est un minimum global si et seulement si $A^*x = -b$.

(3) Si $A \succ 0$, alors $x^* = -A^{-1}b$ est un minium global strict de $f$.

(4) Montre que $f$ est coercive ssi $A \succ 0$.

(5) Montrer que

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & b \\ b^\top & c \end{pmatrix} \succeq 0.$$

**Exercice 6.** Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable sur $\mathbb{R}^n$, et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe, fini en au moins un point. On pose

$$f(x) := (g+h)(x) = g(x) + h(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

et on considère le problème $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

(1) Montrer que $\bar{x}$ minimise $f$ sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\langle \nabla g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \tag{E}$$

(2) Vérifier que (E) est équivalente à

$$\langle \nabla g(x), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \tag{F}$$