Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable. On définit, pour $x > 0$

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que F est convexe.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe bornée supérieurement. Montrer que f est constante.

Exercice 3. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ avec $C \subset \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est quasi-convexe ssi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\},\ \forall x, y \in C, \lambda \in [0,1].$$

Exercice 4. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe et $\mu > 0$. On rappelle qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est dite $\mu-$fortement convexe (ou fortement convexe de module μ) si $g(x) := f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|^2$ est convexe sur C.

(1) Montrer que f est $\mu-$fortement convexe sur C ssi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,\ \forall x, y \in C \text{ et } \lambda \in [0,1].$$

(2) Montrer si f est fortement convexe alors f est strictement convexe.

(3) Supposons que f est C^1. Montre que f est $\mu-$fortement convexe sur C ssi

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2,\ \forall x, y \in C.$$

(4) Supposons que f est C^1. Montre que f est $\mu-$fortement convexe sur C ssi

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq \mu\|x-y\|^2,\ \forall x, y \in C.$$

(5) Supposons que f est C^2. Montre que f est $\mu-$fortement convexe sur C ssi

$$\nabla^2 f(x) \succeq \mu \mathrm{I},\ \forall x \in C.$$

(6) Soit $h = f + g$ avec f fortement convexe et g convexe. Montrer que h est fortement convexe.

(7) Montrer que $f(x) = \sqrt{1 + \|x\|^2}$ est strictement convexe mais pas fortement convexe.

(8) Soit $f(x) = x^T Ax + 2b^T x + c$ avec $A \in \mathcal{S}^n, b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que f est μ-fortement convexe ssi $A \in \mathcal{S}^n_{++}$. Dans ce cas le module de forte convexité est $\mu = 2\lambda_{\min}(A)$.

Exercice 5. On rappelle qu'une application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est monotone si

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que ∇f est monotone. Peut-on dire que toute application monotone est le gradient d'une fonction convexe ?

Exercice 6. Montrer qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe, avec C convexe, si et seulement si pour tout $x, y \in C$ et $\alpha \geq 0$ tel que $y + \alpha(y - x) \in C$ on a

$$f(y + \alpha(y - x)) \geq f(y) + \alpha(f(y) - f(x)). \tag{1}$$

Exercice 7. Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ et $d \in \mathbb{R}$.Montrer que $f(x) = \frac{\|Ax+b\|^2}{c^T x+d}$ est convexe sur $C = \{x : c^T x + d > 0\}$.