Exercice 1. Montrer que les fonctions suivantes sont convexes:

(1) $f_1(x) = \langle a, x\rangle + b$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$.

(2) $f_2(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) $f_3(x) = x^p$, pour $x \in \mathbb{R}^+$ avec $p \geq 1$.

(4) $f_4(x) = x\ln(x)$, pour $x > 0$.

(5) $f_5(x) = e^{\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(6) $f_6(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} x_i$ avec $x \in \mathbb{R}^n$.

(7) $f_7(x, y) = \frac{x^2}{y}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a < b$ deux réels.

(1) Montrer que

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b), \forall x \in [a, b].$$

(2) Montrer que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x},\ \forall x \in (a, b).$$

(3) Supposons que f est différentiable. En utilisant ce qui précède, montrer que

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b).$$

En déduire que si f est deux fois différentiable, on a $f''(b) \geq 0$ et $f''(a) \geq 0$.

Exercice 3. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convex si et seulement si

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$$

pour tout x, y, z tels que $x < y < z$.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_0^1 f(x + t(y-x))dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1}$$

Exercice 5. Soient $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ et $\lambda \in \Delta_n$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \Pi_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}.$$

En déduire que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^{n} x_i}.$$

Exercice 6. Soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$