Exercice 1. Soient $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes. Montrer que la somme partielle de C_1 et C_2 définie par

$$C := \{(x, y_1 + y_2) : \ x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in C_1, (x, y_2) \in C_2\},$$

est convexe

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et considérons les deux hyperplans parallèles suivants

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x = b_i\}, \text{pour } i = 1, 2.$$

Calculer la distance entre H_1 et H_2.

Exercice 3. Soient $a \neq b \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in [0, 1]$. On considère l'ensemble

$$V_\theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| \leq \theta \|x - b\|\}.$$

Montrer que V_1 est un demi-plan, i.e., s'écrit de la forme $\{x : u^T x \leq r\}$ pour $u \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$ à préciser. Que devient V_θ pour $\theta < 1$?. Pour $\theta > 1$?

Exercice 4. Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cône. Le cône dual de C est définie par

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, x \rangle \geq 0 \text{ pour tout } x \in C\}.$$

(1) Montrer que C^* est un cône convexe fermé (même si C n'est pas convexe).

(2) Montrer que si C_1, C_2 sont des cônes convexes tels que $C_1 \subseteq C_2$, alors $C_2^* \subseteq C_1^*$.

(3) Montrer que $(L^n)^* = L^n$ avec

$$L^n = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|x\| \leq t, \ x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(4) Montrer que le cône dual de $K = \left\{ \binom{\mathbf{x}}{t} : \|\mathbf{x}\|_1 \leq t \right\}$ est

$$K^* = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} : \|x\|_\infty \leq t \right\}.$$