

Partie A — Existence de minimiseurs

Exercice 1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact non vide et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x^* \in C$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in C} f(x)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que f est dite propre si $-\infty \notin f(\mathbb{R}^n)$ et $\text{dom}(f) \neq \emptyset$. On dira que f est coercive si $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Finalement, f est dite semi-continue inférieurement (sci) ssi pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x on a $f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

- (1) Montrer que f est coercive si et seulement si $\text{Lev}(f, \alpha)$ est borné pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (2) Supposons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ est propre, semi-continue inférieurement et coercive. Montrer qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.
- (3) Supposons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et coercive et soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vide. Montrer qu'il existe $x^* \in S$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in S} f(x)$.
- (4) Montrer que $f(x, y) = x^2 + y^2$ admet un minimum global sur $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq -1\}$.

Partie B — Convexité, points critiques et fonctions quadratiques

Exercice 3. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe non vide et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- (1) Montrer que tout minimum local de f sur C est un minimum global.
- (2) Montrer que l'ensemble $\text{argmin}_C f$ des minimiseurs de f sur C est convexe.
- (3) Si f est strictement convexe, montrer que f admet au plus un minimiseur sur C .
- (4) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et μ -fortement convexe, et $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide. Montrer que f est coercive, puis que f admet un unique minimiseur sur C .

(Indication : utiliser l'inégalité $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2} \|y - x\|^2$ du TD3.)

Exercice 4. Trouver et déterminer la nature des points critiques des fonctions $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $d = 2, 3$.

- (1) $f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 + 3x^2y - 24y$.
- (2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.
- (3) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(4) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y.$

(5) $f(x, y, z) = -3z^2 + 2y^2 + 2xz + 2y + 1.$

Exercice 5. (★) Soit $n \geq 2$ et $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto p(x) := (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

- (1) Montrer que $0_{\mathbb{R}^n}$ est le seul point critique de p .
- (2) Montrer que $0_{\mathbb{R}^n}$ est minimum local strict de p , mais qu'il n'est pas minimum global de p .

Exercice 6. Soit $f(x) = x^T A x + 2b^T x + c$ avec $A \in \mathcal{S}^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$.

- (1) Montrer que x^* est un point stationnaire si et seulement si $Ax^* = -b$.
- (2) Si $A \succeq 0$, alors x^* est un minimum global si et seulement si $Ax^* = -b$.
- (3) Si $A \succeq 0$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : (i) $b \in \text{Im}(A)$; (ii) f admet un minimiseur ; (iii) f est minorée.
- (4) Si $A \succ 0$, alors $x^* = -A^{-1}b$ est un minimum global strict de f .
- (5) Montrer que f est coercive ssi $A \succ 0$.
- (6) Montrer que

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & b \\ b^\top & c \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$ et $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2$ (problème des moindres carrés).

- (1) Montrer que f est convexe, que $\nabla f(x) = A^\top(Ax - y)$, et que x^* minimise f ssi $A^\top A x^* = A^\top y$.
- (2) Montrer que $\text{Im}(A^\top A) = \text{Im}(A^\top)$. En déduire que f admet toujours au moins un minimiseur.
- (3) Montrer que le minimiseur est unique ssi A est injective.
- (4) Soit $\lambda > 0$ et $f_\lambda(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|^2$ (régularisation de Tikhonov). Montrer que f_λ admet un unique minimiseur $x_\lambda = (A^\top A + \lambda I)^{-1} A^\top y$, quelle que soit A .

Partie C — Optimisation sur un convexe

Exercice 8. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On dit que $x^* \in C$ est un point *stationnaire* du problème $\min_{x \in C} f(x)$ si

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

- (1) Montrer que si x^* est un minimum local de f sur C , alors x^* est stationnaire.
- (2) Si de plus f est convexe, montrer que x^* est un minimiseur global de f sur C ssi x^* est stationnaire.
- (3) Que devient la condition de stationnarité quand $x^* \in \text{int}(C)$? Quand $C = x_0 + V$ est un sous-espace affine (V sous-espace vectoriel) ?

Exercice 9. On considère le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^n} f(x), \tag{P}$$

avec f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ est un point stationnaire (au sens de l'exercice 8) ssi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_i^* > 0, \\ \geq 0, & \text{si } x_i^* = 0. \end{cases}$$

Exercice 10. On considère le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) : \langle a, x \rangle = 1\}, \tag{P}$$

où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}_{++}^n$. Montrer qu'un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle a, x^* \rangle = 1$ est un point stationnaire de (P) ssi

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \frac{1}{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = \dots = \frac{1}{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*).$$

Exercice 11. (★) Soit $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ le simplexe et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et de classe C^1 .

- (1) Montrer que $x^* \in \Delta_n$ minimise f sur Δ_n ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = \lambda \text{ si } x_i^* > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \geq \lambda \text{ si } x_i^* = 0.$$

- (2) Soit $z \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{1}{2}\|x - z\|^2$. Montrer que la projection de z sur Δ_n est $x_i^* = (z_i - \tau)_+ := \max(z_i - \tau, 0)$, où $\tau \in \mathbb{R}$ est tel que $\sum_i (z_i - \tau)_+ = 1$. Calculer cette projection pour $z = (0.9, 0.5, 0.1)$.

Exercice 12. (★) Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide et $x \in \mathbb{R}^n$. On note $p_C(x) = \operatorname{argmin}_{y \in C} \frac{1}{2} \|y - x\|^2$.

- (1) Montrer que $p_C(x)$ existe et est unique.
- (2) Montrer que $p = p_C(x)$ ssi $p \in C$ et $\langle x - p, y - p \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$.
- (3) Montrer que p_C est 1-lipschitzienne : $\|p_C(x) - p_C(x')\| \leq \|x - x'\|$.
- (4) Calculer p_C pour (a) $C = \mathbb{R}_+^n$; (b) $C = \overline{B}(0, r)$, $r > 0$; (c) $C = \{y : \langle a, y \rangle = b\}$, $a \neq 0$.

Exercice 13. (★) Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable sur $\mathbb{R}^n$, et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe, fini en au moins un point. On pose

$$f(x) := (g + h)(x) = g(x) + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et on considère le problème $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

- (1) Montrer que $\bar{x}$ minimise f sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\bar{x} \in \operatorname{dom}(h)$ et

$$\langle \nabla g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{E})$$

- (2) Vérifier que (E) est équivalente à

$$\langle \nabla g(x), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{F})$$