

Partie A — Caractérisation par la définition

Exercice 1. Montrer que les fonctions suivantes sont convexes:

(1) $f_1(x) = \langle a, x \rangle + b$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$.

(2) $f_2(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) $f_6(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ avec $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ avec $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe. On rappelle que l'épigraphe de f est l'ensemble

$$\text{epi}(f) := \{(x, t) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Montrer que f est convexe si et seulement si $\text{epi}(f)$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe bornée supérieurement. Montrer que f est constante.

Exercice 4. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ avec $C \subset \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est quasi-convexe ssi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall x, y \in C, \lambda \in [0, 1].$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a < b$ deux réels.

(1) Montrer que

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b), \quad \forall x \in [a, b].$$

(2) Montrer que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}, \quad \forall x \in (a, b).$$

Exercice 6. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$$

pour tout x, y, z tels que $x < y < z$.

Exercice 7. Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_0^1 f(x + t(y - x)) dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}. \quad (1)$$

Exercice 8. Montrer qu'une fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, avec C convexe, si et seulement si pour tout $x, y \in C$ et $\alpha \geq 0$ tel que $y + \alpha(y - x) \in C$ on a

$$f(y + \alpha(y - x)) \leq f(y) + \alpha(f(y) - f(x)). \quad (2)$$

Exercice 9. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, avec $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe, et soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et croissante sur un intervalle I contenant $f(C)$. Montrer que $g \circ f$ est convexe sur C .

Exercice 10. Soient $x_1, \dots, x_n \geq 0$ et $\lambda \in \Delta_n$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}.$$

En déduire que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

Exercice 11. Soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Partie B — Caractérisations différentielles

Exercice 12. Montrer, en utilisant une caractérisation différentielle de la convexité, que les fonctions suivantes sont convexes:

(1) $f_3(x) = x^p$, pour $x \in \mathbb{R}^+$ avec $p \geq 1$.

(2) $f_4(x) = x \ln(x)$, pour $x > 0$.

(3) $f_5(x) = e^{\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) $f_7(x, y) = \frac{x^2}{y}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a < b$ deux réels, et reprenons les notations de l'exercice 5. Supposons que f est différentiable. En utilisant l'exercice 5, montrer que

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

En déduire que si f est deux fois différentiable, on a $f''(a) \geq 0$ et $f''(b) \geq 0$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable. On définit, pour $x > 0$

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que F est convexe.

Exercice 15. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe et $\mu > 0$. On rappelle qu'une fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite μ -fortement convexe (ou fortement convexe de module μ) si $g(x) := f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|^2$ est convexe sur C .

(1) Montrer que f est μ -fortement convexe sur C ssi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C \text{ et } \lambda \in [0, 1].$$

(2) Montrer si f est fortement convexe alors f est strictement convexe.

(3) Supposons que f est C^1 . Montre que f est μ -fortement convexe sur C ssi

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C.$$

(4) Supposons que f est C^1 . Montre que f est μ -fortement convexe sur C ssi

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C.$$

(5) Supposons que f est C^2 . Montre que f est μ -fortement convexe sur C ssi

$$\nabla^2 f(x) \succeq \mu I, \quad \forall x \in C.$$

(6) Soit $h = f + g$ avec f fortement convexe et g convexe. Montrer que h est fortement convexe.

(7) Montrer que $f(x) = \sqrt{1 + \|x\|^2}$ est strictement convexe mais pas fortement convexe.

(8) Soit $f(x) = x^T A x + 2b^T x + c$ avec $A \in \mathcal{S}^n, b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que f est μ -fortement convexe ssi $A \in \mathcal{S}_{++}^n$. Dans ce cas le module de forte convexité est $\mu = 2\lambda_{\min}(A)$.

Exercice 16. On rappelle qu'une application $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est monotone si

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que ∇f est monotone. Peut-on dire que toute application monotone est le gradient d'une fonction convexe ?

Exercice 17. Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $d \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = \frac{\|Ax+b\|^2}{c^T x + d}$ est convexe sur $C = \{x : c^T x + d > 0\}$.