

Exercice 1. Montrer que les ensembles suivants sont convexes:

- (1) $L = \{x + td : t \in \mathbb{R}\}$ avec $x, d \in \mathbb{R}^n$ et $d \neq 0$.
- (2) Les boules ouvertes et fermées: $B(a, r), B_f(a, r)$ avec $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$.
- (3) $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$, $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.
- (4) $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$, $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes. Montrer que les ensembles $C_1 \cap C_2, C_1 + C_2, C_1 \times C_2$ sont convexes.

Exercice 3. Soient $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes. Montrer que la somme partielle de C_1 et C_2 définie par

$$C := \{(x, y_1 + y_2) : x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in C_1, (x, y_2) \in C_2\},$$

est convexe

Exercice 4. Soient $S, T \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que:

- (1) Si $S \subset T$ alors $\text{Conv}(S) \subset \text{Conv}(T)$.
- (2) $\text{Conv}(S + T) = \text{Conv}(S) + \text{Conv}(T)$
- (3) $\text{Conv}(\text{Conv}(S)) = \text{Conv}(S)$.
- (4) Montrer que $\text{Conv}(S \times T) = \text{Conv}(S) \times \text{Conv}(T)$.

Exercice 5. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété dite de demi-somme:

$$x, y \in C \Rightarrow \frac{x + y}{2} \in C.$$

C est-il convexe ? Que dire si C est supposé être fermé ?.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et considérons les deux hyperplans parallèles suivants

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_i\}, \text{ pour } i = 1, 2.$$

Calculer la distance entre H_1 et H_2 .

Exercice 7. Soient $a \neq b \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in [0, 1]$. On considère l'ensemble

$$V_\theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq \theta \|x - b\|\}.$$

Montrer que V_1 est un demi-plan, i.e., s'écrit de la forme $\{x : u^T x \leq r\}$ pour $u \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$ à préciser. Que devient V_θ pour $\theta < 1$? Pour $\theta > 1$?

Exercice 8. (1) Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ et $\mathcal{S}_{++}^n$ sont convexes. Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ est un cône, i.e., pour tout $\lambda \geq 0$ et $A \in \mathcal{S}_+^n$, on a $\lambda A \in \mathcal{S}_+^n$.

(2) Montrer que $\mathcal{S}_+^n$ est fermé. Qu'elle est l'adhérence de $\mathcal{S}_{++}^n$?

Exercice 9. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe non vide. On définit le cône normal de C en x par

$$N_C(x) = \begin{cases} \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y - x \rangle \leq 0 \text{ pour tout } y \in C\} & \text{si } x \in C \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $N_C(x)$ est un cône convexe fermé.

Exercice 10. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un convexe borné et symétrique tel que $0 \in \text{int}(K)$. Montrer que

$$g_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in K\}$$

est une norme.

Exercice 11. Montrer que

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\} := B_{\|\cdot\|_1}(0, 1) = \text{Conv}(e_1, -e_1, e_2, -e_2),$$

e_1 et e_2 étant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Quels sont les points extrémaux de $B_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$.

Exercice 12. Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cône. Le cône dual de C est définie par

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \geq 0 \text{ pour tout } x \in C\}.$$

(1) Montrer que C^* est un cône convexe fermé (même si C n'est pas convexe).

(2) Montrer que si C_1, C_2 sont des cônes convexes tels que $C_1 \subseteq C_2$, alors $C_2^* \subseteq C_1^*$.

(3) Montrer que $(L^n)^* = L^n$ avec

$$L^n = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq t, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(4) Montrer que le cône dual de $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} : \|x\|_1 \leq t \right\}$ est

$$K^* = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} : \|x\|_\infty \leq t \right\}.$$