

Exercice 1. Calculer ∇f (ou J_f si f est vectorielle) des fonctions suivantes:

- (1) $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto u^T x$.
- (2) $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax + b \in \mathbb{R}^m$ avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.
- (3) $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}(x^T Ax) + b^T x + c$, avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Même question pour $A \in \mathcal{S}^n$.
- (4) $f : \mathbb{R}^n \mapsto \|Ax - b\|_2^2$.
- (5) $f(x) = \|x\|_2$.
- (6) $f(x) = \log \left(\sum_{i=1}^m \exp(a_i^T x + b_i) \right)$, avec $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$.
- (7) $f(X) = \log \det(X)$ avec $X \in \mathcal{S}_{++}^n$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = f(x + y, x^2 + y^2).$$

Exprimer les dérivées partielles de g en (1, 2) en fonction de celles de f .

- Exercice 3.** (1) Soit $A \in \mathcal{S}_{++}^n$. Peut-on dire que les composantes de A sont positives ?
- (2) Soit $A \in \mathcal{S}_+^n$ (respectivement dans $\mathcal{S}_{++}^n$). Montrer que les éléments diagonaux de A sont positifs (respectivement strictement positifs).
- (3) Soit $A \in \mathcal{S}_-^n$ (respectivement dans $\mathcal{S}_{--}^n$). Montrer que les éléments diagonaux de A sont négatifs (respectivement strictement négatifs). Soit $A \in \mathcal{S}^n$. Montrer que si A possède des éléments diagonaux strictement négatifs et positifs, alors A est non-définie.

Exercice 4. (1) Soient $A, B \in \mathcal{S}_+^n$. Montrer que $A + B \in \mathcal{S}_+^n$.

- (2) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ et posons $B = AA^T$. Montrer que $B \in \mathcal{S}_+^n$. Montrer que $B \in \mathcal{S}_{++}^n$ si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.
- (3) Soient $A \in \mathcal{S}^n$ et $B \in \mathcal{S}^m$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_+^n$ et $B \in \mathcal{S}_+^m$ si et seulement si
- $$\begin{pmatrix} A & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_+^{n+m}$$

Exercice 5. Soit $M \in \mathcal{S}_{++}^n$. Montrer que $\|x\|_M = \sqrt{x^T M x}$ est une norme.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{S}_{++}^n$. On note $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A .

- (1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on: $\lambda_{\min} \|x\|_2^2 \leq x^T A x \leq \lambda_{\max} \|x\|_2^2$.
- (2) En déduire que pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $C_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x \leq \alpha\}$ est borné.