Espaces vectoriels

ENSIMAG Alternance $1^{\text{ère}}$ année

Hamza Ennaji

Dernière modification: December 24, 2025

Contents

❊ Corps

Nous avons besoin de rappeler la notion de corps pour préciser l'ensemble des scalaires.

Définition 1. Un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations $+$ et $\cdot$, dites addition et multiplication, telles que pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

- **Commutativité :** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ et $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
- **Associativité :** $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ et $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
- **Éléments neutres :** Il existe $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$ (avec $0_{\mathbb{K}} \neq 1_{\mathbb{K}}$) tels que $0_{\mathbb{K}} + \alpha = \alpha$ et

$1_{\mathbb{K}} \cdot \alpha = \alpha$.

- **Inverses :** Il existe un opposé $-\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha + (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$. Pour tout $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, il existe un inverse $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$.
- **Distributivité :** $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Example. Voici quelques exemples classiques :

- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles.
- L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ muni des lois usuelles. On rappelle que pour $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \gamma + i\delta$:

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\right\}$.
- L'ensemble fini $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ (aussi noté $\mathbb{F}_2$) avec les opérations suivantes (arithmétique binaire) :

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Remarque. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement 0 et 1 au lieu de $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$.

Convention. Tout au long du cours, le corps $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

※ Espaces vectoriels

Définition 2. Un espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-ev) est un ensemble $\mathbb{E}$ muni de deux opérations :

i) **Addition de vecteurs** (loi interne) : pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, il existe un élément noté $x + y \in \mathbb{E}$.

ii) **Multiplication par un scalaire** (loi externe) : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$, il existe un élément noté $\lambda \cdot x \in \mathbb{E}$.

Ces opérations doivent vérifier les axiomes suivants pour tous $x, y, z \in \mathbb{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

A1. **Commutativité :** $x + y = y + x$.

A2. **Associativité :** $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A3. **Élément neutre :** Il existe un élément $0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}$ tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$.

A4. **Opposé :** Pour tout $x \in \mathbb{E}$, il existe un élément (noté $-x$) tel que $x + (-x) = 0_{\mathbb{E}}$.

A5. $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

A6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$.

A7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

A8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

Remarque. Les hypothèses (A1-A4) expriment le fait que $(\mathbb{E}, +)$ est un **groupe abélien** (ou commutatif). Autrement dit, un espace vectoriel est un groupe abélien muni d'une loi externe vérifiant (A5-A8).

Example. Quelques exemples fondamentaux :

- **L'espace nul :** $\mathbb{E} = \{0_{\mathbb{E}}\}$.
- **Les vecteurs colonnes :** $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots, n\}$.
- **Les polynômes :** $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément $P \in \mathbb{E}$ s'écrit :

  $$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{K} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

  Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit le polynôme $\lambda \cdot P$ par :

  $$(\lambda \cdot P)(X) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) X^i.$$

  Pour un autre polynôme $Q(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ (on suppose ici $m = n$ pour simplifier l'écriture, quitte à compléter par des zéros), on définit la somme par :

$$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i.$$

- **Produit cartésien :** Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, alors l'ensemble produit $\mathbb{E} = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-ev.
- **Les matrices :** Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients réels. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ définies par :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

On définit l'addition et la multiplication par un scalaire terme à terme :

$$\lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M + N = \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, l'espace $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ des matrices à m lignes et n colonnes est un espace vectoriel.

2.1 Propriétés élémentaires

Proposition 1. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{E}$, on a les propriétés suivantes :

i) **Simplification à droite :** Si $x + z = y + z$, alors $x = y$.

ii) **Simplification à gauche :** Si $z + x = z + y$, alors $x = y$.

iii) **Unicité du neutre :** L'élément neutre $0_{\mathbb{E}}$ est unique. Si un autre élément $0'$ vérifie $x + 0' = x$ pour tout x, alors $0' = 0_{\mathbb{E}}$.

Preuve. i) D'après la définition (existence de l'opposé), il existe $z' \in \mathbb{E}$ tel que $z + z' = 0_{\mathbb{E}}$. On a donc :

$$\begin{aligned} x &= x + 0_{\mathbb{E}} \\ &= x + (z + z') \\ &= (x + z) + z' \quad \text{(par associativité)} \\ &= (y + z) + z' \quad \text{(par hypothèse } x + z = y + z\text{)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= y + (z + z') \quad \text{(par associativité)} \\
&= y + 0_{\mathbb{E}} \\
&= y.
\end{aligned}
$$

ii) Si $z + x = z + y$, alors par commutativité (Définition 2), on a $x + z = y + z$. On conclut d'après le point i) que $x = y$.

iii) Supposons que $0'$ soit un élément neutre. On a alors $0_{\mathbb{E}} + 0' = 0_{\mathbb{E}}$ (car $0'$ est neutre) et $0_{\mathbb{E}} + 0' = 0'$ (car $0_{\mathbb{E}}$ est neutre). Donc $0_{\mathbb{E}} = 0'$.

□

Corollaire (Unicité de l'opposé)**.** Soit $x \in \mathbb{E}$. L'élément $y \in \mathbb{E}$ vérifiant $x + y = 0_{\mathbb{E}}$ est unique. Autrement dit, si y et y' sont deux opposés de x, alors $y = y'$. On note cet unique élément $-x$.

Example.
- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, le vecteur nul est $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0)$.
- Dans $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, la matrice nulle est $0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$, l'élément neutre est le polynôme nul, noté 0.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{E}$ est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v.) de $\mathbb{E}$ s'il est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les opérations induites (l'addition et la multiplication scalaire de $\mathbb{E}$).

Autrement dit, $(F, +_{\mathbb{E}}, \cdot_{\mathbb{E}})$ doit vérifier les 8 axiomes (A1-A8) vus dans la Définition 2.

Example. Exemples de sous-espaces vectoriels

L'espace nul : $F = \{0_{\mathbb{E}}\} \subset \mathbb{E}$.

- L'hyperplan "horizontal" : $F = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$.
- Les polynômes de degré borné : $F = \mathbb{K}_n[X] \overset{\text{def}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg(P) \leq n\} \subset \mathbb{K}[X]$.

Le résultat suivant fournit un "test" pratique pour vérifier si un ensemble est

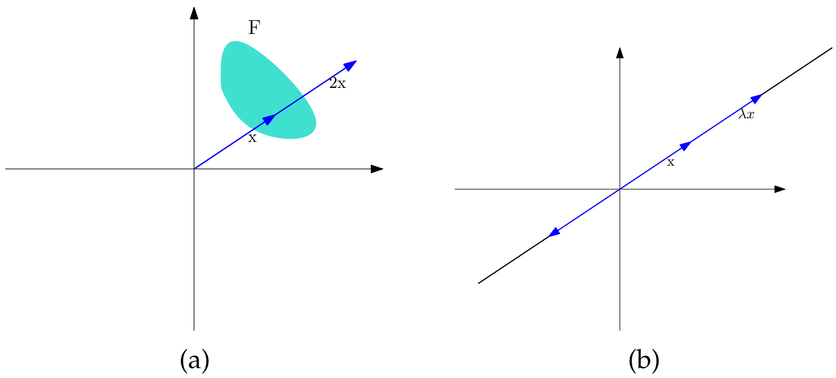


Figure 1: La Figure 1a montre un sous-ensemble F du plan qui n'est stable ni par addition de vecteurs, ni par multiplication par un scalaire. En revanche, la Figure 1b montre une partie du plan (une droite vectorielle) qui est stable par addition et par multiplication scalaire.

un sous-espace vectoriel.

Proposition 2 (Caractérisation des sous-ev)**.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset \mathbb{E}$ un sous-ensemble non vide. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si et seulement si :

1. $0_{\mathbb{E}} \in F$ (condition nécessaire, utile pour réfuter rapidement).
2. **Stabilité par addition :** Si $x, y \in F$, alors $x + y \in F$.
3. **Stabilité par multiplication scalaire :** Si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$.

Ces conditions sont équivalentes à une seule condition (stabilité par combinaison linéaire) :

$$F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F.$$

Exercise

Vérifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0\}$.
- $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
- $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 0\}$.

2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

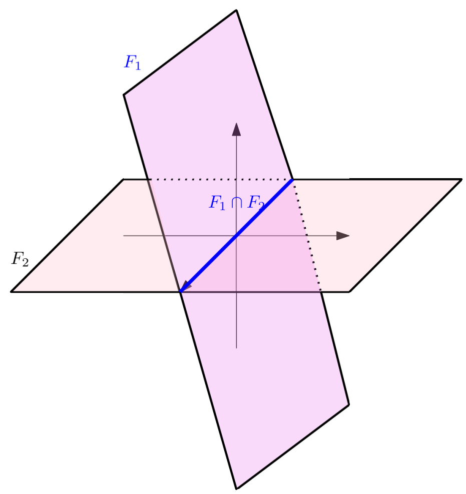


Figure 2: Illustration de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (ici, deux plans vectoriels). Leur intersection est une droite vectorielle.

Proposition 3. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Alors l'intersection $F \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i\in I} F_i$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Preuve. On utilise la caractérisation donnée par la Proposition 2.

- **Élément neutre :** Comme chaque F_i est un sous-espace vectoriel, on sait que $0_{\mathbb{E}} \in F_i$ pour tout $i \in I$. Donc $0_{\mathbb{E}} \in F$.
- **Stabilité :** Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition de l'intersection, x et y appartiennent à F_i pour tout indice $i \in I$. Or, chaque F_i est stable par combinaison linéaire (car c'est un s.e.v.), donc $\lambda x + y \in F_i$ pour tout $i \in I$. On en déduit que $\lambda x + y \in \bigcap_{i\in I} F_i$, c'est-à-dire $\lambda x + y \in F$.

Conclusion : F est bien un s.e.v. de $\mathbb{E}$. $\square$

Example. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ correspondant aux axes de coordonnées :

$$F_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

On vérifie facilement que leur intersection $F_1 \cap F_2 = \{(0,0)\}$ est le sous-espace vectoriel nul.

Remarque. Si l'intersection de sous-espaces est toujours un sous-espace, ce n'est **pas vrai** pour l'union. Par exemple, reprenons F_1 et F_2 ci-dessus. L'union $F_1 \cup F_2$ est la "croix" des axes. Si on prend $u = (1,0) \in F_1$ et $v = (0,1) \in F_2$, leur somme $u+v = (1,1)$ n'est ni dans F_1, ni dans F_2. L'union n'est pas stable par addition.

2.4 Combinaisons linéaires et sous-espaces engendrés

Définition 4. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $S \subset \mathbb{E}$ une partie de $\mathbb{E}$. Un vecteur $x \in \mathbb{E}$ est une **combinaison linéaire** d'éléments de S s'il peut s'écrire comme une somme **finie** d'éléments de S pondérés par des scalaires.

Autrement dit, s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, des vecteurs $v_1, \dots, v_n \in S$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

À partir d'une partie S, on peut construire un sous-espace vectoriel en prenant toutes les combinaisons possibles :

Définition 5 (Sous-espace engendré)**.** Soit $S \subset \mathbb{E}$ un sous-ensemble non vide. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par S*, noté $\mathrm{Vect}(S)$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de S :

$$\mathrm{Vect}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, v_i \in S \right\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. De plus, c'est le *plus petit* s.e.v. de $\mathbb{E}$ contenant S.

Remarque.
- Par convention, $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_{\mathbb{E}}\}$.
- On a toujours l'inclusion $S \subset \mathrm{Vect}(S)$. En effet, tout vecteur $v \in S$ peut s'écrire $v = 1_{\mathbb{K}} \cdot v$ (c'est une combinaison linéaire à un seul terme).
- Si S est fini, par exemple $S = \{v_1, \dots, v_p\}$, on note souvent $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

Example.
- Dans $\mathbb{R}^3$, si $u = (1,0,0)$ et $v = (0,1,0)$, alors $\mathrm{Vect}(u,v)$ est le plan (xOy), c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de la forme $(x,y,0)$.

- Si $S = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ où $P_k = X^k$, alors $\mathrm{Vect}(S) = \mathbb{K}_n[X]$ (l'espace des polynômes de degré au plus n).

Theorem 1. Soit $S \subset \mathbb{E}$ une partie non vide. On a les propriétés suivantes :

- $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
- $S \subset \mathrm{Vect}(S)$.
- $\mathrm{Vect}(S)$ est le **plus petit** sous-espace vectoriel contenant S. Autrement dit, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ tel que $S \subset F$, alors $\mathrm{Vect}(S) \subset F$.

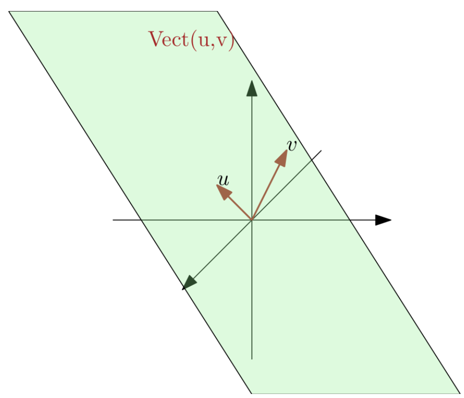


Figure 3: Deux vecteurs non-colinéaires u et v. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{u, v\})$ est le plan vectoriel qui les contient (ici représenté par le parallélogramme engendré).

Définition 6. Une famille $S \subset \mathbb{E}$ est dite **génératrice** de $\mathbb{E}$ si $\mathrm{Vect}(S) = \mathbb{E}$. Autrement dit, tout vecteur de $\mathbb{E}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de S.

Example. Voici les familles génératrices canoniques (usuelles) :

- Dans $\mathbb{R}^n$: La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ définie par :

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1),$$

  est génératrice de $\mathbb{R}^n$. En effet, tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n.$$

- Dans $\mathbb{C}$: Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par la famille $\{1, i\}$. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x \cdot 1 + y \cdot i$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

- Dans les matrices : L'espace $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est engendré par la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) des matrices élémentaires :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'écrit $M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$.

- Dans les polynômes : La famille des monômes $\{1, X, \ldots, X^n\}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$. Tout polynôme P de degré $\leq n$ s'écrit :

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \cdots + a_n \cdot X^n.$$

2.5 Famille libre, famille liée

Étant donnée une famille $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{E}$, on remarque que le vecteur nul $0_{\mathbb{E}}$ s'obtient de façon **triviale** comme combinaison linéaire des v_i, c'est-à-dire :

$$0_{\mathbb{E}} = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

La question est de savoir si c'est la *seule* façon d'obtenir $0_{\mathbb{E}}$. Il est parfois possible d'avoir une réalisation **non-triviale** de $0_{\mathbb{E}}$, c'est-à-dire de trouver des scalaires $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ *non tous nuls* tels que:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0_{\mathbb{E}}.$$

Cela motive les définitions suivantes :

Définition 7 (Indépendance linéaire)**.** Soit $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

- La famille S est dite **libre** (ou linéairement indépendante) si la seule combinaison linéaire nulle est la triviale:

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}} \right) \implies (\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0).$$

- La famille S est dite **liée** (ou linéairement dépendante) si elle n'est pas libre. Autrement dit, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **non tous nuls** tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}}.$$

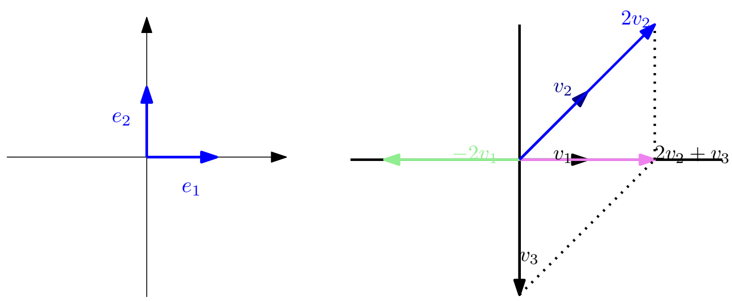
Remarque (Intuition : La Redondance)**.** Dire qu'une famille est *liée*, c'est dire qu'il y a de l'information "en double" ou "redondante".

Concrètement, une famille est liée si et seulement si *l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres*. Dans l'exemple illustré par la Figure 4, la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec

$$v_1 = (0,0), v_2 = (1,1), v_3 = (0,-2),$$

est liée (car $2v_1 - 5v_2 - 1v_3 = 0$, et les coefficients ne sont pas tous nuls).

Example.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{(1,0),(0,1)\}$ est libre.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{(1,0),(2,0)\}$ est liée (car le deuxième est le double du premier).
- Toute famille contenant le vecteur nul $0_{\mathbb{E}}$ est forcément liée (car $1 \cdot 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}}$).



(a) (b)

Figure 4: Comparaison entre famille libre et liée dans $\mathbb{R}^2$. La Figure 4a illustre la base canonique, qui est libre. La Figure 4b montre une famille liée $S = \{v_1, v_2, v_3\}$: on peut voir que v_3 est une combinaison des deux autres ($v_3 = 2v_1 - 2v_2$).

Proposition 4. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $S_1 \subset S_2 \subset \mathbb{E}$ deux parties de $\mathbb{E}$.

- Si S_1 est liée, alors S_2 est liée. (Une sur-famille d'une famille liée est liée).
- Si S_2 est libre, alors S_1 est libre. (Une sous-famille d'une famille libre est

libre).

Exercise

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $S_1 = \{u_1\}$ avec $u_1 = (1, 1, 3)$.
   (a) Vérifier que $u_1 \in E$.
   (b) En déduire que $\text{Vect}(S_1) \subset E$.
   (c) Justifier que $E = \text{Vect}(S_1)$.
3. Soit $S_2 = \{u_2, u_3\}$ avec $u_2 = (3, 2, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.
   (a) Montrer que $\text{Vect}(S_2)$ est contenu dans F.
   (b) Montrer que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de S_2.
   (c) En déduire que $F = \text{Vect}(S_2)$.
   (d) La partie F est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
4. La famille $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ou liée ? Que peut-on en déduire pour les familles S_1 et S_2 ?

2.6 Bases et dimension

Définition 8. Une famille $S \subset \mathbb{E}$ est une **base** de $\mathbb{E}$ si elle est à la fois **libre** et **génératrice**.

Cela signifie que tout vecteur de $\mathbb{E}$ s'écrit de manière **unique** comme combinaison linéaire des éléments de S.

Example.
- La famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée **base canonique**.
- La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Elle est constituée des matrices *élémentaires*. Chaque matrice $E_{i,j}$ ne possède qu'une seule entrée non nulle (qui vaut 1) située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \text{colonne } j & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \text{ligne } i \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- La famille $\{1, X, \ldots, X^n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ (polynômes de degré $\leq n$).
- La famille infinie $\{1, X, X^2, \ldots\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ (l'espace de tous les polynômes).

Le résultat suivant montre que toute famille génératrice finie peut être réduite à une base, essentiellement en éliminant les vecteurs redondants (ceux qui sont combinaisons linéaires des autres).

Theorem 2 (de la base extraite). Soit S une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$. Alors on peut extraire une sous-famille $B \subset S$ qui est une base de $\mathbb{E}$.

Remarque. Le résultat reste **vrai** en dimension infinie (la démonstration repose alors sur *l'Axiome du choix*).

Example. On considère la famille $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^2$ avec :

$$u_1 = (-2, 0), \quad u_2 = (1, 1), \quad u_3 = (0, 1).$$

C'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ (car elle contient "plus" de vecteurs qu'une base). Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, il y a nécessairement un vecteur en trop (redondant). On observe la relation suivante :

$$u_1 = -2(1, 0) = -2(u_2 - u_3) \implies u_1 = -2u_2 + 2u_3.$$

Le vecteur u_1 est donc combinaison linéaire de u_2 et u_3. On peut le supprimer. La famille restante $B = \{u_2, u_3\}$ est libre (vecteurs non colinéaires) et génératrice, c'est donc une base extraite de S.

Le résultat suivant affirme qu'une famille libre L dans $\mathbb{E}$ contient au plus autant d'éléments qu'une famille génératrice S. De plus, on peut compléter L en piochant intelligemment dans S pour fabriquer une base.

Theorem 3 (de la base incomplète)**.** Soit S une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$ avec $\mathrm{Card}(S) = n$, et soit $L \subset \mathbb{E}$ une famille libre avec $\mathrm{Card}(L) = m$. Alors :

- $m \leq n$.
- Il existe une sous-famille $H \subset S$ telle que la réunion $L \cup H$ soit une base de $\mathbb{E}$.
- Le nombre d'éléments ajoutés est $\mathrm{Card}(H) = \dim(\mathbb{E}) - m$.

2.7 Dimension d'un espace vectoriel

Pour définir la dimension, nous avons besoin d'un résultat fondamental qui assure que ce nombre est bien défini (qu'il ne dépend pas de la base choisie).

Theorem 4 (Invariance de la dimension)**.** Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel admettant une base finie. Toutes les bases de $\mathbb{E}$ ont le même nombre d'éléments (le même cardinal).

Définition 9. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev.

- Si $\mathbb{E}$ admet une base finie S, on dit que $\mathbb{E}$ est de **dimension finie**. On appelle **dimension** de $\mathbb{E}$ le cardinal de cette base, noté :

$$\dim(\mathbb{E}) = \mathrm{Card}(S).$$

- Si $\mathbb{E}$ n'admet pas de base finie, on dit qu'il est de **dimension infinie** (on note parfois $\dim(\mathbb{E}) = \infty$).

Example. • $\dim(\{0_{\mathbb{E}}\}) = 0$. *(Car la base est l'ensemble vide, de cardinal 0).*

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ et $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$.
- $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.
- La dimension dépend du corps des scalaires $\mathbb{K}$:
  - $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ (Base $\{1, i\}$).
  - $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ (Base $\{1\}$).

Corollaire. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie n. Soit S une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Si $\text{Card}(S) = n$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- S est une famille **libre**.
- S est une famille **génératrice**.
- S est une **base** de $\mathbb{E}$.

Remarque. Le résultat ci-dessus est très puissant: si on a le bon nombre de vecteurs, il suffit de vérifier une seule condition pour prouver que c'est une base.

Proposition 5 (Dimension d'un sous-espace)**.** Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ (avec $\dim(\mathbb{E}) < \infty$). Alors F est de dimension finie et :

$$\dim(F) \leq \dim(\mathbb{E}).$$

De plus, l'égalité $\dim(F) = \dim(\mathbb{E})$ a lieu si et seulement si $F = \mathbb{E}$.

Corollaire. Soit F un sev de $\mathbb{E}$. Toute base de F peut être complétée en une base de $\mathbb{E}$ (en utilisant des vecteurs de $\mathbb{E} \setminus F$).